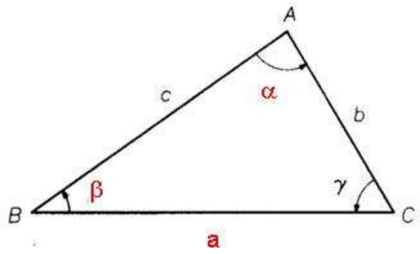
Risoluzione dei triangoli qualunque

Per risolvere un triangolo qualsiasi devono essere noti tre elementi di cui almeno un lato.
Si possono presentare quattro casi:

1° caso - **Noti due angoli e un lato.**



Elementi noti: α, β, ***a***

Elementi da trovare: γ, ***b***, ***c***

– ***Calcolo di*** γ

L'angolo γ sarà: $\boxed{\gamma = 180° - (\alpha + \beta)}$

– ***Calcolo di b e c***

Dal teorema dei seni si ricava: $\boxed{b = a\dfrac{sen\beta}{sen\alpha}}$, $\boxed{c = a\dfrac{sen\gamma}{sen\alpha}}$

<u>*Esempio 1*</u>

Risolvere il triangolo qualunque ABC dati a=6 , α=45° e β=30°; trovare γ, b, c.

– *L'angolo* γ *sarà:*

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma = 180° - (45° + 30°) = 180° - 75° = 105° \Rightarrow \gamma = 105°$$

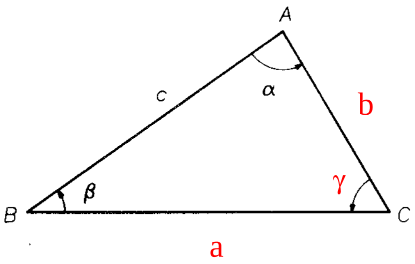
– *Dalla formula* $b = a\dfrac{sen\beta}{sen\alpha} \Rightarrow b = 6\dfrac{sen30°}{sen45°} = 6 \cdot \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6 \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} = \cancel{6} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 3\sqrt{2}$,

$$b = 3\sqrt{2}$$

– *Dalla formula* $c = a\dfrac{sen\gamma}{sen\alpha} \Rightarrow c = 6\dfrac{sen105°}{sen45°} = 6\dfrac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \cancel{6}^{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\cancel{4}^{\cancel{2}}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} =$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 3\left(1+\sqrt{3}\right), \quad c = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$$

2° caso - **Noti due lati e l'angolo compreso.**



Elementi noti: ***a***, ***b***, γ

Elementi da trovare: α, β, ***c***

– ***Calcolo di c***

Dal teorema del coseno si ricava: $\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}}$

– ***Calcolo di*** β

Dal teorema dei seni si ha: $\boxed{sen\beta=\frac{b}{c}sen\gamma}$ da cui si ricava β.

– ***Calcolo di*** α

L'angolo α sarà: $\boxed{\alpha=180°-(\beta+\gamma)}$

<u>*Esempio 2*</u>

Risolvere il triangolo qualunque ABC dati $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ e $\gamma=30°$*;*
trovare α*,* β*, c.*

– *Dalla formula* $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}\Rightarrow c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma\Rightarrow$

$$c^2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\cdot\cos 30°=$$

$$=6-4\sqrt{3}+2+2-\cancel{2}\left(2\sqrt{3}-2\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}==10-4\sqrt{3}-6+2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$$

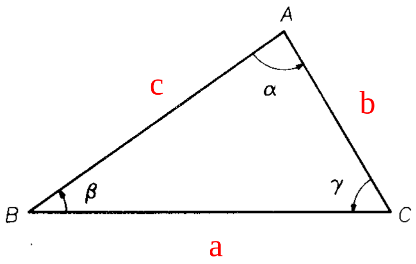
$$c^2=4-2\sqrt{3}\Rightarrow c=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{4}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{4}}{2}}=\sqrt{3}-1$$

– *Dalla formula* $sen\beta=\frac{b}{c}sen\gamma\Rightarrow sen\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}sen30°=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \beta=105°$

– L'angolo α sarà: $\alpha=180°-(\gamma+\beta)\Rightarrow\alpha=180°-(30°+105°)=45°\Rightarrow \alpha=45°$

3° caso - **Noti i tre lati.**



Elementi noti: ***a***, ***b***, ***c***

Elementi da trovare: α, β, γ

– ***Calcolo di*** α

Dal teorema del coseno si ha: $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$ da cui si ricava α.

– ***Calcolo di*** γ

Dal teorema dei seni si ha: $\boxed{sen\gamma = \dfrac{c}{a} sen\alpha}$ da cui si ricava γ.

– ***Calcolo di*** β

L'angolo β sarà: $\boxed{\beta = 180° - (\alpha + \gamma)}$

<u>*Esempio 3*</u>

Risolvere il triangolo qualunque ABC dati a=2, b=$1+\sqrt{3}$ e c=$\sqrt{6}$ *; trovare* α, β, γ.

– Dalla formula $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 4}{2\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{6}} =$

$$= \frac{1+3+2\sqrt{3}+6-4}{2\left(\sqrt{6}+3\sqrt{2}\right)} = \frac{\cancel{2}\left(\sqrt{3}+3\right)}{\cancel{2}\left(\sqrt{6}+3\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}+3\right)\cdot\left(\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)} =$$

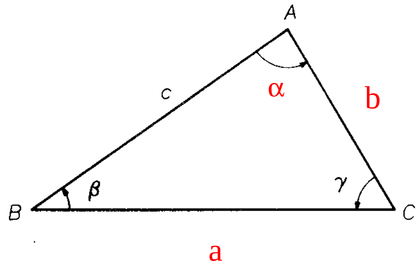
$$= \frac{3\sqrt{2} + \cancel{3\sqrt{6}} - 9\sqrt{2} - \cancel{3\sqrt{6}}}{6-18} = \frac{\cancel{-6}\sqrt{2}}{\cancel{-12}^{\,2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$$

– *Dalla formula* $sen\gamma = \dfrac{c}{a} sen\alpha \Rightarrow sen\gamma = \dfrac{\sqrt{6}}{2} sen45° = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}^{\,2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\gamma = 60°$

– L'angolo β sarà:
$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (45° + 60°) = 180° - 105° = 75° \Rightarrow \beta = 75°$

4° caso - **Noti due lati e un angolo opposto ad uno di essi.**



Elementi noti: ***a***, ***b***, α

Elementi da trovare: γ, β, ***c***

Supposto $\alpha \neq 90°$ *e* $a \neq b$ *(altrimenti il triangolo sarebbe rispettivamente rettangolo o isoscele e quindi facilmente risolvibile), si ha:*

- ***Calcolo di*** β

Dal teorema dei seni si ha: $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow \boxed{sen\beta = \frac{b}{a} sen\alpha}$ da cui si ricava β.

1) Se **sen**β **>1** $\Rightarrow$ impossibile, perché -1<senβ <1

2) Se **sen**β **≤1** $\Rightarrow$ si può ricavare β

   In particolare:
   - se **sen**β **=1** $\Rightarrow$ β=90° $\Rightarrow$ se α>90°$\Rightarrow$ impossibile (perché α+β+γ=180°)
     se α<90°$\Rightarrow$ 1 sola soluzione
   - se **0<sen**β**<1** $\Rightarrow$ se *a*>*b* $\Rightarrow$ 1 soluzione
     se *a*<*b* $\Rightarrow$ se α≥90°$\Rightarrow$ impossibile
     se α<90°$\Rightarrow$ 2 soluzioni β_1 e β_2

- ***Calcolo di*** γ

L'angolo γ sarà: $\boxed{\gamma = 180° - (\alpha + \beta)}$

- ***Calcolo di* c**

Dal teorema dei seni si ha: $\frac{c}{sen\gamma} = \frac{a}{sen\alpha} \Rightarrow \boxed{c = a\frac{sen\gamma}{sen\alpha}}$

<u>*Esempio 4*</u>

Risolvere il triangolo qualunque ABC dati a=12 , *b*=12$\sqrt{2}$ e α=30°; *trovare c, β, γ.*

- *Dalla formula* $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = \frac{b}{a} sen\alpha \Rightarrow sen\beta = \frac{12\sqrt{2}}{12} sen30° =$

$$=\frac{\cancel{12}\sqrt{2}}{\cancel{12}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Poiché $\frac{b}{a}sen\alpha<1$ *, a<b e α<90°⇒ 2 soluzioni* $\beta_1=45°$ *e* $\beta_2=135°$

– *L'angolo* γ *sarà:*

$$\gamma_1=180°-(\alpha+\beta)\Rightarrow\gamma=180°-(45°+30°)=180°-75°=105°\Rightarrow\gamma_1=105°$$

$$\gamma_2=180°-(\alpha+\beta)\Rightarrow\gamma=180°-(135°+30°)=180°-165°=15°\Rightarrow\gamma_2=15°$$

– *Dalla formula* $\frac{c}{sen\gamma}=\frac{b}{sen\beta}\Rightarrow\boxed{c=b\frac{sen\gamma}{sen\beta}}$

1) $c_1=b\frac{sen\gamma_1}{sen\beta_1}\Rightarrow c_1=12\sqrt{2}\cdot\frac{sen105°}{sen45°}=12\sqrt{2}\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$

$$=\cancel{12}^{3}\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\cancel{4}^{1}}\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}=6\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\Rightarrow c_1=6\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

2) $c_2=b\frac{sen\gamma_2}{sen\beta_2}\Rightarrow c_2=12\sqrt{2}\cdot\frac{sen15°}{sen135°}=12\sqrt{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$

$$=\cancel{12}^{3}\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\cancel{4}}\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}==6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\Rightarrow c_2=6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$