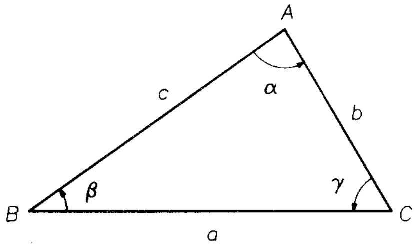
Relazioni tra gli elementi di un triangolo qualunque

Consideriamo il triangolo scaleno in figura



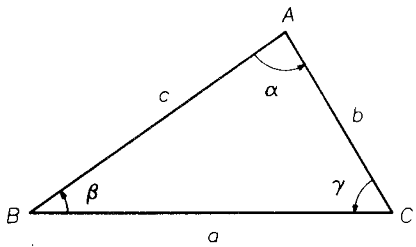
Per esso valgono i seguenti teoremi:

1. **Teorema dei seni (o di EULERO)**

In un triangolo qualunque le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

Cioè:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}}$$

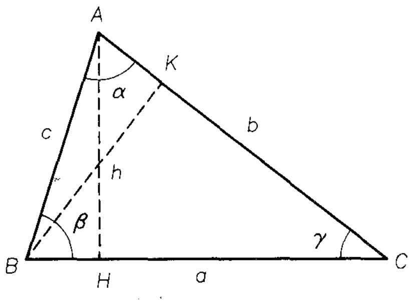


Nella dimostrazione del teorema distinguiamo due casi, a seconda che il triangolo ABC sia acutangolo oppure ottusangolo.

Nota
Il teorema è valido anche nel caso del triangolo rettangolo.

Dimostrazione

1°) Sia **ABC acutangolo**.



Nel triangolo ABC, una qualunque altezza AH lo divide nei due triangoli rettangoli ACH e ABH Detta h la misura dell'altezza AH, si ha:

$$h = b \ \text{sen}\gamma \quad \text{e} \quad h = c \ \text{sen}\beta,$$

da cui si ricava: $b \ \text{sen}\gamma = c \ \text{sen}\beta,$

cioè anche:

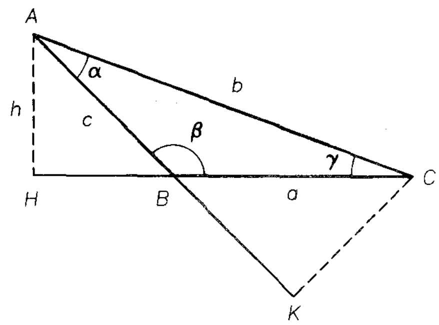
$$\frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

Analogamente, se consideriamo un'altra altezza, per es. BK, si ottiene:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\ .$$

Confrontando le relazioni ottenute, si conclude che: $\boxed{\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$

2°) Sia **ABC ottusangolo**.



Se ABC è ottusangolo in B, dai triangoli rettangoli ACH e ABH si ha:

$$h = b\ \operatorname{sen}\gamma \quad \text{e} \quad h = c\ \operatorname{sen}\ (180° - \beta).$$

Ma essendo:

$$\operatorname{sen}\ (180° - \beta) = \operatorname{sen}\beta,$$

si ha:

$$h = b\ \operatorname{sen}\gamma = c\ \operatorname{sen}\beta,$$

da cui si ottiene:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\ .$$

Analogamente, se consideriamo un'altra altezza, per es. CK, si ottiene:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}\ .$$

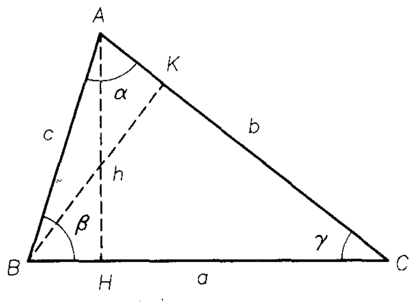
Confrontando le relazioni ottenute, si conclude, anche in questo caso, che:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$$

c.d.d.

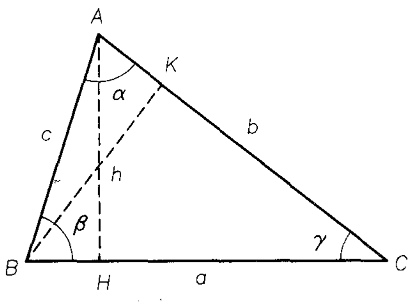
2. **Teorema delle proiezioni**

In un triangolo qualunque, la misura di un lato è eguale alla somma dei prodotti delle misure di ciascuno degli altri due lati per il coseno degli angoli che essi formano con il primo.



$$\boxed{\begin{aligned} a &= b\ \cos\gamma + c\ \cos\beta \\ b &= c\ \cos\alpha + a\ \cos\gamma \\ c &= a\ \cos\beta + b\ \cos\alpha \end{aligned}}$$

Dimostrazione



Questo teorema è una conseguenza del teorema dei seni.

Infatti, detto k il valore comune delle tre frazioni della $\dfrac{a}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\text{sen}\beta} = \dfrac{c}{\text{sen}\gamma}$

si ha: $(1')\qquad a = k\text{sen}\alpha, \quad b = k\text{sen}\beta, \quad c = k\text{sen}\gamma.$

Ora, essendo:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma),$$

si ha:

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}(\beta + \gamma) = \text{sen}\beta\cos\gamma + \cos\beta\text{sen}\gamma$$

cosicché, la prima eguaglianza della (1') si scrive:

$$a = k\ \text{sen}\alpha = k\ \text{sen}\beta\ \cos\gamma + k\ \cos\beta\ \text{sen}\gamma,$$

infine, tenendo conto delle altre due eguaglianze della (1'), si ha:

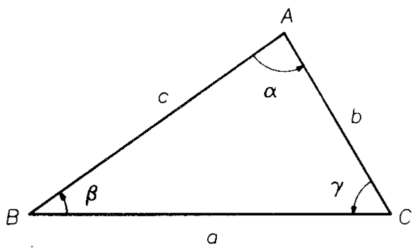
$$a = b\ \cos\gamma + c\ \cos\beta.$$

Analogamente per gli altri lati.

c.d.d.

3. **Teorema del coseno (o di Carnot)**

In un triangolo qualsiasi, il quadrato della misura di ogni lato è eguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso.



$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac\ \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma \end{aligned}}$$

Dimostrazione

Si tratta di provare, ad esempio, che è: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha.$

Per il teorema delle proiezioni, si ha:

$$a = b\ \cos\gamma + c\ \cos\beta,$$
$$b = c\ \cos\alpha + a\ \cos\gamma,$$
$$c = a\ \cos\beta + b\ \cos\alpha.$$

Moltiplicando ambo i membri della prima per a, ambo i membri della seconda per - b ed ambo i membri della terza per - c, si ottiene:

$$\begin{aligned} a^2 &= ab\ \cos\gamma + ac\ \cos\beta, \\ -b^2 &= -bc\ \cos\alpha - ab\ \cos\gamma, \\ -c^2 &= -ac\ \cos\beta - bc\ \cos\alpha. \end{aligned}$$

Sommando, membro a membro, queste tre eguaglianze e riducendo i termini simili, si ottiene:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos\alpha$$

da cui: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

c.d.d.