Applicazioni della trigonometria alla geometria

1. Area di un triangolo, note le misure di due lati e quella dell'angolo da essi compreso.

TEOREMA

L'area di un qualsiasi triangolo è eguale al semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso.

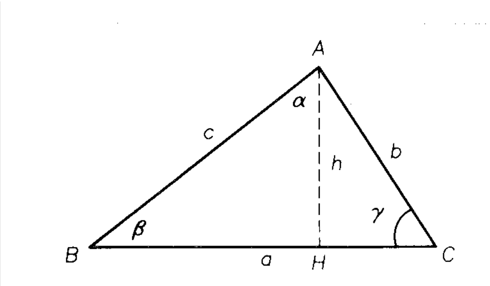
$$S=\frac{1}{2}ab\ \mathrm{sen}\,\gamma,\quad S=\frac{1}{2}ac\ \mathrm{sen}\,\beta;\quad S=\frac{1}{2}bc\ \mathrm{sen}\,\alpha.$$

Dimostrazione

Supponiamo, ad esempio, note le misure a e *b* dei lati *BC* e *AC* del triangolo *ABC e la* misura γ dell'angolo compreso.

Tesi:

$$S=\frac{1}{2}ab\ \mathrm{sen}\,\gamma,\qquad (1)$$



Infatti, se AH è l'altezza relativa al lato BC e h ne è la misura, dal triangolo rettangolo ACH, si ha:

$$h=b\ \mathrm{sen}\,\gamma.$$

$$S=\frac{1}{2}ab\ \mathrm{sen}\,\gamma,$$

Di qui, e dal fatto che è: $S=\frac{1}{2}ah,$

si ricava:

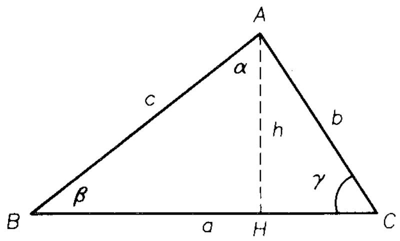
$$S=\frac{1}{2}ab\ \mathrm{sen}\,\gamma,$$

Similmente, si ha:

$$S=\frac{1}{2}ac\ \mathrm{sen}\,\beta;\quad S=\frac{1}{2}bc\ \mathrm{sen}\,\alpha.$$

c.d.d.

2. Area di un triangolo, nota la misura degli angoli e quella di un lato.



Se a è la misura del lato che si suppone noto, vogliamo dimostrare che è:

$$\boxed{S = \frac{a^2 \operatorname{sen}\beta \ \operatorname{sen}\gamma}{2 \ \operatorname{sen}\alpha}}$$

Infatti, dal teorema dei seni, si ha: $\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$,

da cui: $$b = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Sostituendo questo valore, al posto di b, nella formula $S = \frac{1}{2} ab \ \operatorname{sen}\gamma$,

si ottiene appunto la

$$\boxed{S = \frac{a^2 \operatorname{sen}\beta \ \operatorname{sen}\gamma}{2 \ \operatorname{sen}\alpha}}$$

Similmente si trova:

$$\boxed{S = \frac{b^2 \operatorname{sen}\alpha \ \operatorname{sen}\gamma}{2 \ \operatorname{sen}\beta}; \quad S = \frac{c^2 \operatorname{sen}\alpha \ \operatorname{sen}\beta}{2 \ \operatorname{sen}\gamma}.}$$

c.d.d.

3. Area di un triangolo, note le misure dei tre lati (formula di ERONE)

In questo caso si applica la formula, di *ERONE* ([1]):

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

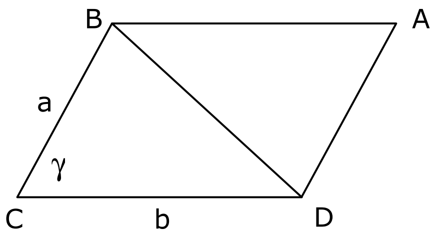
ove p indica la misura del semiperimetro del triangolo.

[1] *La dimostrazione trigonometrica della formula viene omessa.*

4. Area di un parallelogramma.

L'area di un parallelogrammo è uguale al prodotto delle misure di due lati consecutivi per il seno dell'angolo da essi formato.

$$\boxed{S_{ABCD} = ab \cdot sen\gamma}$$



Consideriamo la diagonale BD che divide il parallelogrammo ABCD in due triangoli congruenti ABD e BCD. Per determinare l'area del parallelogrammo basterà moltiplicare per due l'area del triangolo BCD.

Poiché l'area del triangolo BCD è data da $S_{BCD} = \frac{1}{2} ab \cdot sen\gamma$ risulterà

$$S_{ABCD} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} ab \cdot sen\gamma = ab \cdot sen\gamma \; .$$

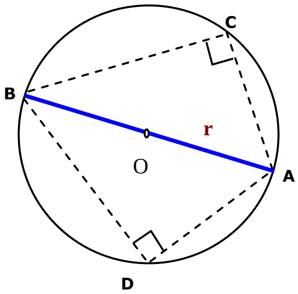
c.d.d.

5. TEOREMA DELLA CORDA

In una circonferenza la misura di una corda è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza, che insistono su uno degli archi sottesi alla corda.

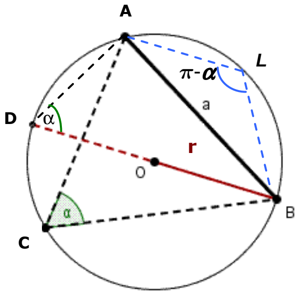
$$\boxed{\overline{AB} = 2r \cdot sen\alpha}$$

1° CASO: <u>la corda AB è un diametro</u>



Sia AB la corda, poiché passa per il centro essa coincide con il diametro, dunque $\overline{AB} = 2r$.

2° caso: la corda AB non è un diametro



Se la corda AB non è un diametro, tracciamo il diametro BD: il triangolo ABD è rettangolo (perché l'angolo $B\widehat{A}D$ insiste su una semicirconferenza) pertanto, per il teorema dei triangoli rettangoli, avremo

$$\overline{AB} = 2\,r \cdot sen\alpha$$

Se consideriamo l'arco ALB, per una proprietà relativa ai quadrilateri inscritti in una circonferenza avremo che l'angolo alla circonferenza $A\widehat{L}B$ sarà $\pi - \alpha$ e quindi essendo $sen(\pi - \alpha) = sen\alpha$ avremo

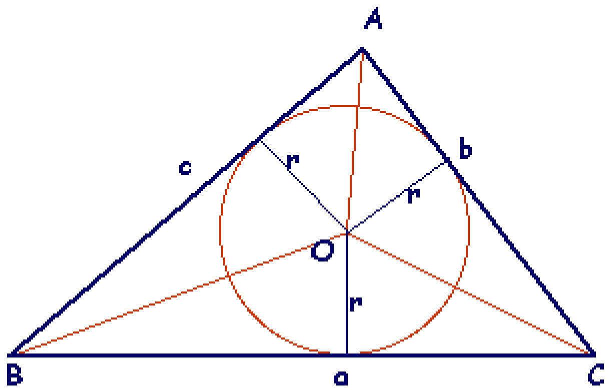
$$\overline{AB} = 2r \cdot sen(\pi - \alpha) = 2r \cdot sen\alpha\ .$$

c.d.d.

6. Raggio della circonferenza inscritta

La misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è data dal rapporto tra l'area del triangolo e il suo semiperimetro.

$$\boxed{r = \frac{A}{p}}$$



Sia ABC un triangolo qualunque; consideriamo la circonferenza in esso inscritta, il cui centro O è il punto d'incontro delle bisettrici (*incentro*) e il cui raggio r è la distanza di questo punto da uno qualsiasi dei tre lati.

Poiché l'area *A* del triangolo ABC può determinarsi come somma delle aree dei triangoli BCO, ABO e ACO, si ha:

$$A = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = p \cdot r$$

Da cui si ricava:

$$r = \frac{A}{p}$$

Ricordando la *formula di Erone*, si può anche scrivere:

$$r = \frac{A}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

Moltiplicando e dividendo numeratore e e denominatore per (p — a) si ottiene:

$$r = (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Analogamente si può dimostrare che:

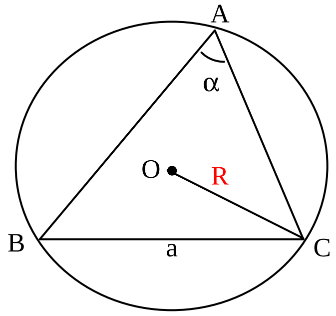
$$r = (p-b)\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \qquad r = (p-c)\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{p(p-c)}}$$

c.d.d.

7. Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo, note le misure dei lati.

La misura del raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo è data dal rapporto tra il prodotto delle misure dei suoi lati e il quadruplo dell'area del triangolo.

$$\boxed{R = \frac{abc}{4A}}$$



Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo; essa ha centro nel punto O d'incontro degli assi (*circocentro*) e raggio *R* uguale alla distanza di questo da un qualsiasi vertice.

Poiché ogni lato del triangolo è una corda della circonferenza, possiamo applicare il *teorema della corda*.

Si ricava che:

$$a = 2R \cdot sen\alpha,\ b = 2R \cdot sen\beta,\ c = 2R \cdot sen\gamma,$$

e quindi:

$$R = \frac{a}{2 \cdot sen\alpha}, \; R = \frac{b}{2 \cdot sen\beta}, \; R = \frac{c}{2 \cdot sen\alpha}\gamma,$$

Consideriamo, per es., la prima uguaglianza. Moltiplicando numeratore e denominatore per *bc*, si ottiene:

$$R = \frac{a \cdot bc}{2 \cdot bc \cdot sen\alpha},$$

ma $A = \frac{1}{2} bc \cdot sen\alpha, \Rightarrow 4A = 4\frac{1}{2} bc \cdot sen\alpha = 2bc \cdot sen\alpha \Rightarrow R = \frac{abc}{4A}$

quindi

$$R = \frac{abc}{4A}$$

c.d.d.