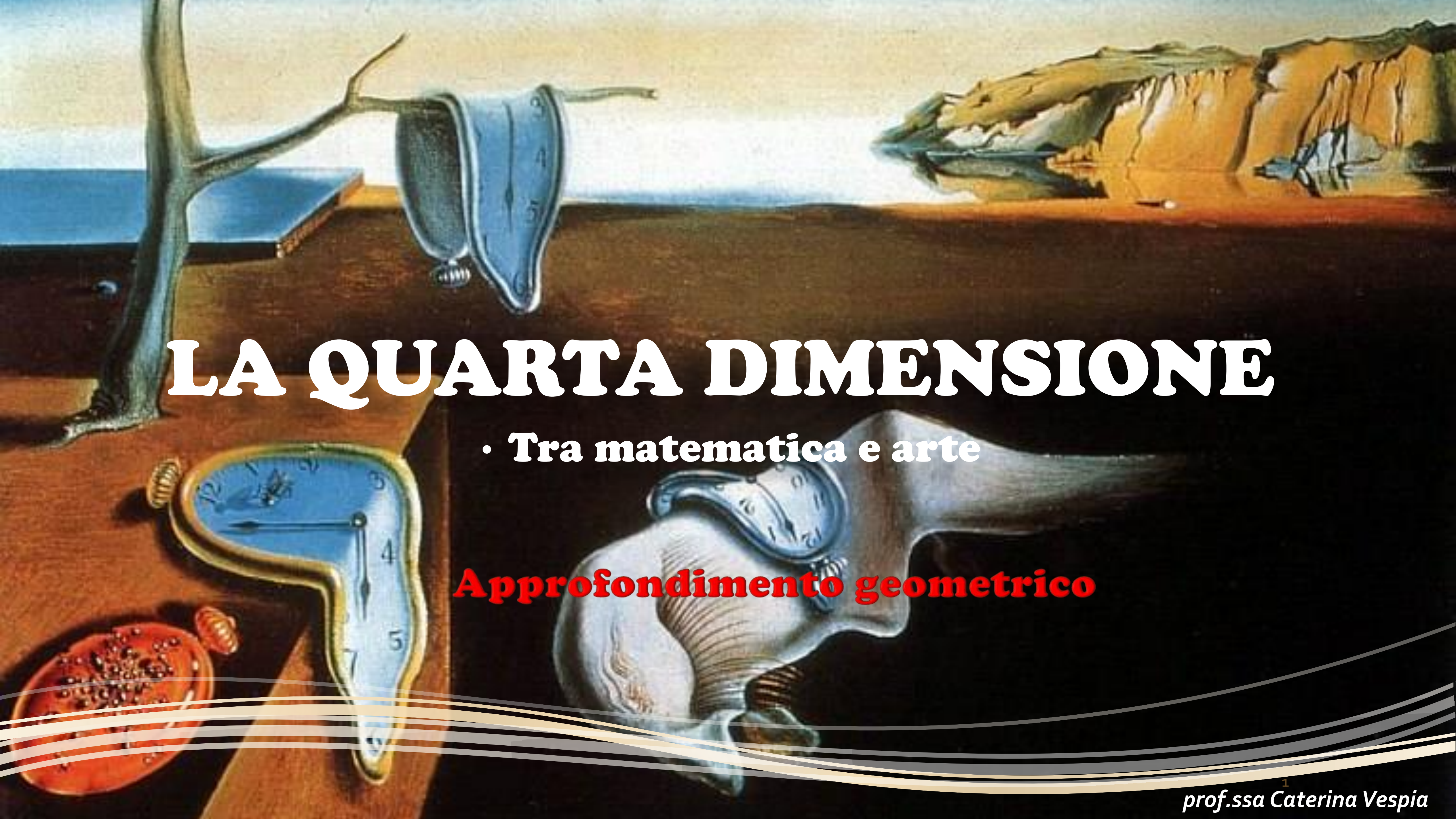


LA QUARTA DIMENSIONE

- **Tra matematica e arte**

Approfondimento geometrico

prof.ssa Caterina Vespia

Approfondimento geometrico

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

Partiamo dall'idea di spazio euclideo tridimensionale come modello matematico dello spazio fisico.

Mentre lo spazio fisico presenta caratteristiche "*concrete*", quello euclideo è costituito da "*oggetti ideali*" (punti senza dimensione, rette perfettamente parallele, ...).

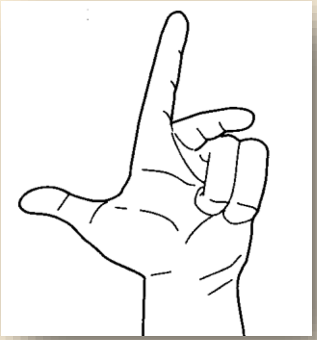
Lo spazio euclideo è un insieme infinito di punti che contiene sottoinsiemi infiniti detti ***piani*** e ogni piano contiene infinite ***rette***.

Per ogni piano valgono gli ***assiomi*** del piano euclideo.

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

Anche nello spazio euclideo tridimensionale, così come nel piano, è possibile introdurre un riferimento cartesiano per individuare la posizione di ogni punto.

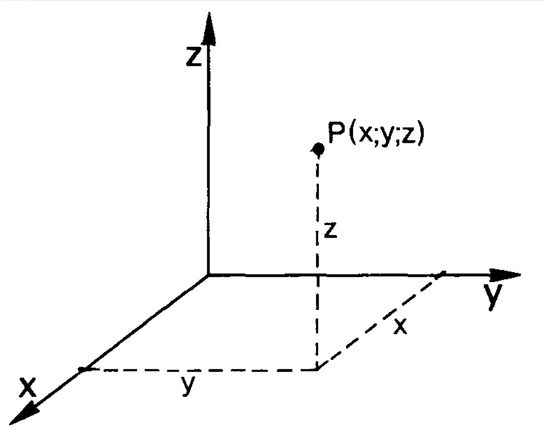
Il riferimento cartesiano è formato da tre rette non complanari chiamate ***assi di riferimento*** che si intersecano in uno stesso punto detto ***origine del riferimento***.

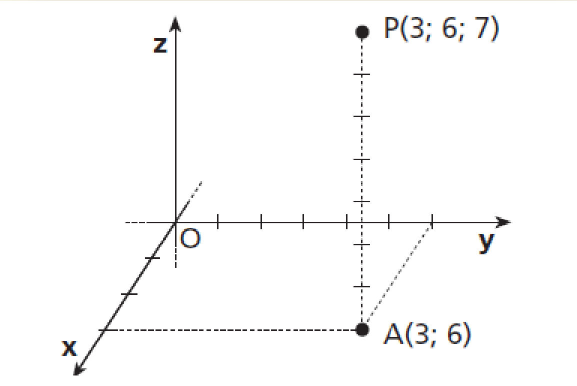


Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale - *approfondimento*

Si scelgono: una unità di misura, un verso positivo per ogni asse.

Come per il piano, anche per lo spazio si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle terne ordinate di numeri reali è l'insieme dei punti del piano $\Rightarrow (x, y, z) \leftrightarrow P$





Punto P di ascissa 3, ordinata 6 e quota 7

I tre numeri reali ***x***, ***y***, ***z*** si chiamano ***ascissa***, ***ordinata***, ***quota***.
I tre piani si chiamano ***piani coordinati***.
Se i tre assi sono perpendicolari il sistema è detto ***sistema di riferimento ortogonale***.

Se l'unità di misura è uguale per tutti e tre gli assi, il sistema si dice ***monometrico***.

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

Generalizzando si può pensare uno spazio a più dimensioni, tante quante sono le variabili e ogni punto del quale è caratterizzato da un numero di coordinate pari alla sua dimensione $\Rightarrow$ lo spazio a 4 dimensioni è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle quaterne di numeri reali.

Quindi ***un punto*** sarà definito con ***una quaterna di numeri reali***.

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

Come rappresentare oggetti tridimensionali sul piano?

Si usano delle forme convenzionali di rappresentazione dette **assonometri e**.

- <u>assonometria isometrica</u>: i tre assi sono rappresentati come semirette che formano tra loro angoli di 120°.

  Questo tipo di assonometria mantiene uguali quelle lunghezze che nella realtà sono uguali.

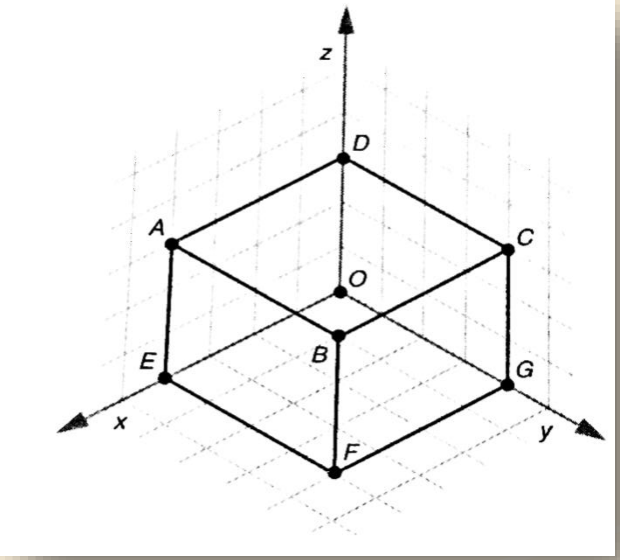


figura 1

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

Come rappresentare oggetti tridimensionali sul piano?

- assonometria di cavalieri: due assi y e z sono rappresentati perpendicolari mentre il terzo x è inclinato ugualmente rispetto ad essi. L'unità di misura usata per l'asse x è metà della unità di misura usate su y e z.

Esempio: lo stesso parallelepipedo di *figura 1* diventa *figura 2.*

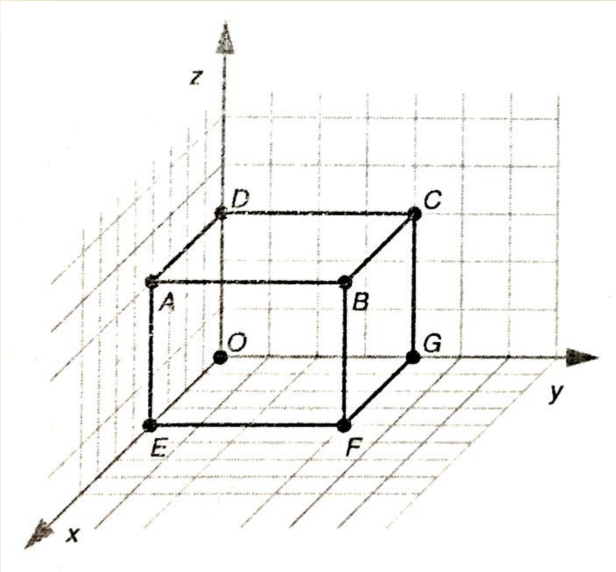
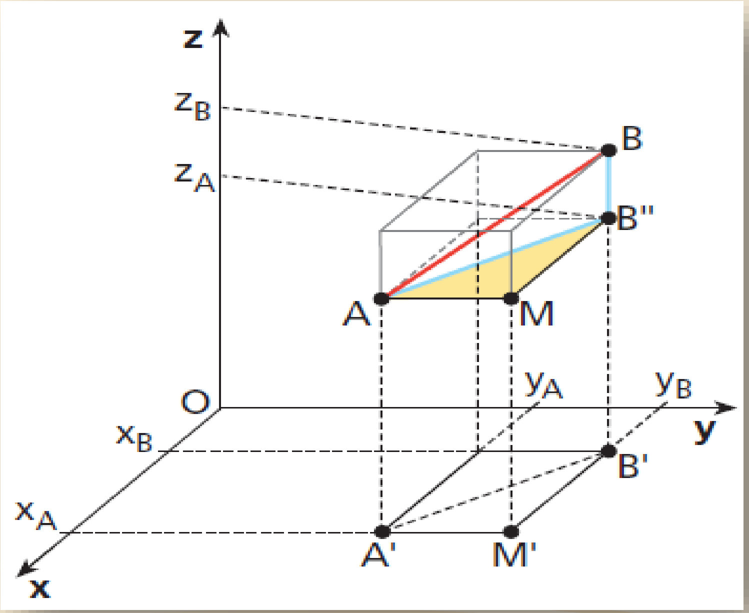


figura 2

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

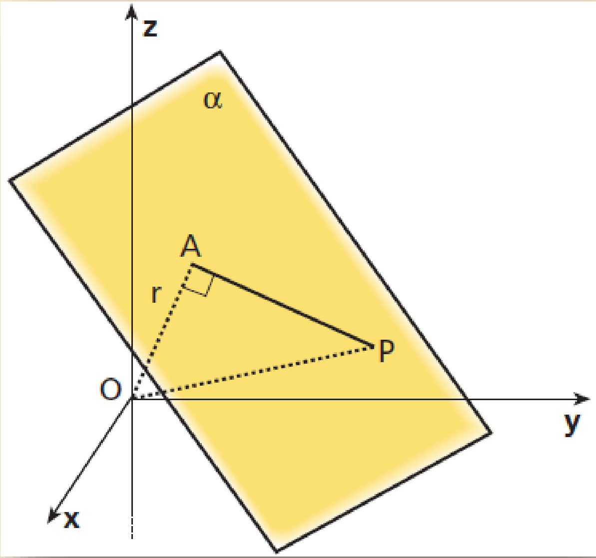
Distanza tra due punti nello spazio



$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

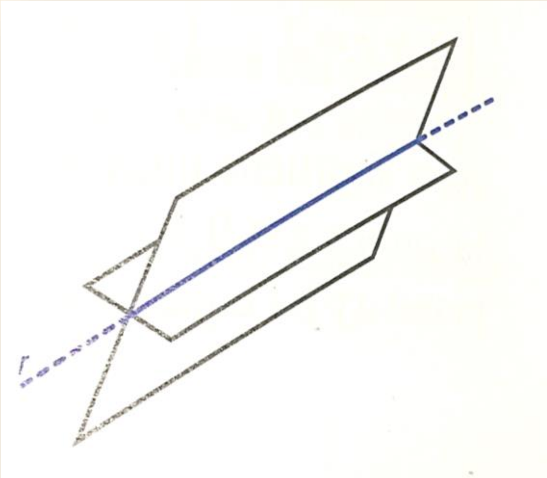
Equazione di un piano nello spazio



$ax + by + cz + d = 0$ forma implicita; $z = mx + ny + q$ forma esplicita.

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

Equazione di una retta nello spazio



La retta è caratterizzata come intersezione di due piani e, quindi, rappresenta l'insieme delle soluzioni di un sistema di due equazioni in tre incognite.

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

Uno spazio a più dimensioni, in cui ogni punto è caratterizzato da un numero di coordinate pari alla sua dimensione, è uno spazio non più rappresentabile ma soltanto numerico definito dalle corrispondenze biunivoche:

insieme dei punti di uno spazio a 4 dimensioni, S_4	$\leftrightarrow$	insieme delle quaterne di numeri reali, $\mathbf{R}^4$
insieme dei punti di uno spazio a 5 dimensioni, S_5	$\leftrightarrow$	insieme delle cinquine di numeri reali, $\mathbf{R}^5$
...		...
insieme dei punti di uno spazio a n dimensioni	$\leftrightarrow$	insieme delle n-ple di numeri reali, $\mathbf{R}^n$

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

Nel caso di **4 dimensioni** è anche possibile avere, oltre che una definizione numerica, una intuizione geometrica.

Partiamo dall'osservazione che nel nostro spazio tridimensionale il movimento ha tre "**gradi di libertà**": ci sono tre tipi di movimenti reciprocamente perpendicolari (destra/sinistra, avanti/dietro, su/giù) ed ogni punto del nostro spazio può essere raggiunto con una adeguata composizione di questi tre tipi di movimenti.

Per intuire geometricamente uno ***spazio quadridimensionale*** occorre stabilire una quarta direzione perpendicolare alle altre tre.

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

La sequenza:

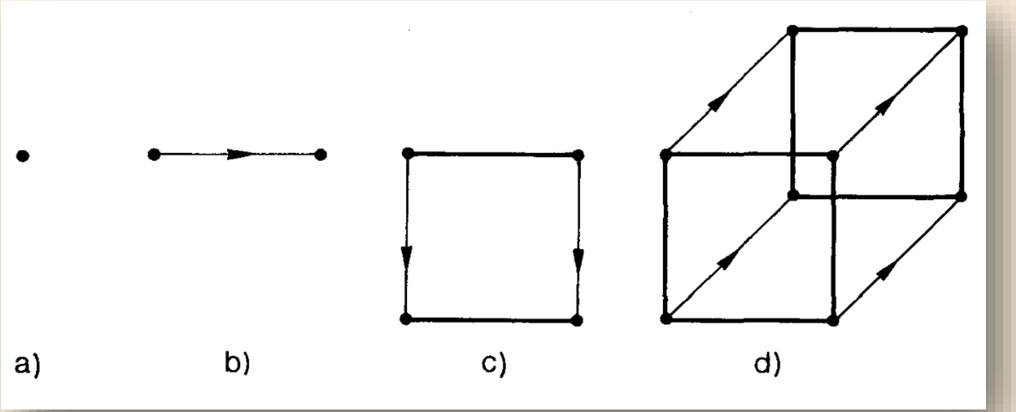
a) un punto (un punto ha dimensione 0);

b) un segmento ottenuto traslando il punto, per esempio orizzontalmente verso destra (un segmento ha dimensione 1);

c) un quadrato ottenuto traslando il segmento precedente secondo un vettore ad esso perpendicolare e avente la stessa lunghezza (un quadrato ha dimensione 2);

d) un cubo ottenuto traslando il quadrato secondo un vettore di direzione perpendicolare al piano del quadrato e avente lunghezza uguale al suo lato (un cubo ha dimensione 3).

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*



Nella figura il cubo tridimensionale è rappresentato su un foglio bidimensionale; per questo la terza direzione viene rappresentata con una linea che è diagonale, piuttosto che perpendicolare, rispetto alle altre due direzioni (sinistra! destra e su! giù).

E’ possibile quindi rappresentare la quarta dimensione con una direzione sul foglio che sia perpendicolare alla direzione (diagonale) usata per rappresentare la terza dimensione.

In questo modo si realizza una traslazione del cubo secondo un vettore lungo come il suo spigolo e perpendicolare alle altre direzioni.

Si ottiene così un iper-cubo a quattro dimensioni.

Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale *- approfondimento*

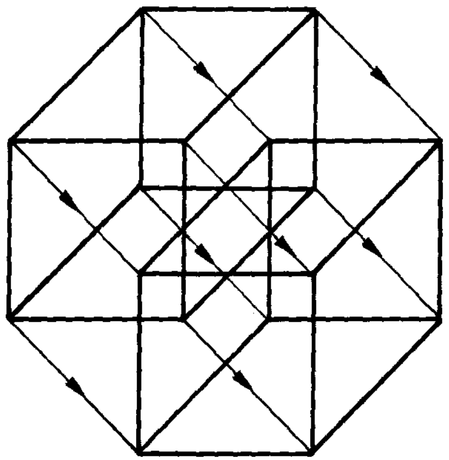


Figura 2

Rappresentando un solido quadridimensionale su un foglio bidimensionale si ha una notevole ambiguità dell'immagine, ma si può osservare che l'iper-cubo ha ***16 vertici***, ***32 spigoli***, ***24 facce*** e ***8 celle cubiche***: *le proprietà del cubo si sono estese ad una dimensione superiore*.