

The background of the slide is Salvador Dalí's painting 'The Persistence of Memory'. It depicts a desolate, brown landscape with a dead tree on the left and a rocky cliff on the right. In the foreground, a pocket watch is draped over a branch, another is on a table next to a bowl of ants, and a third is on a melting pocket watch face. The sky is a pale, hazy blue.

# LA QUARTA DIMENSIONE

• **Tra matematica e arte**

*“Nessuno è in grado di indicare la quarta dimensione, eppure essa ci circonda.*

*La quarta dimensione è una direzione diversa da tutte le direzioni dello spazio normale.*

*Alcuni dicono che la quarta dimensione è costituita dal tempo e, in un certo senso, questo è vero.*

*Altri affermano che la quarta dimensione è una direzione dell'iperspazio affatto diversa dal tempo... e anche questo è vero”.*

[Rudy Rucker](#)

*(La quarta dimensione. Un viaggio guidato negli universi di ordine superiore)*

# Cos'è la quarta dimensione?

Il termine *quarta dimensione* è generalmente riferito ad una estensione degli oggetti ulteriore rispetto alla lunghezza, alla larghezza e alla profondità, che implica la necessità di una ulteriore coordinata oltre a quelle spaziali per individuare univocamente la posizione dei punti.

In fisica, e in particolare nella teoria della relatività di Albert Einstein, la quarta dimensione è riferita al *tempo*.

Dal punto di vista matematico, oltre alla quarta dimensione possono esserne aggiunte altre che possono avere caratteristiche anche completamente differenti rispetto a quelle della geometria euclidea.

# Cos'è la geometria?

La geometria è fondamentalmente *l'analisi di proprietà che servono per studiare lo spazio fisico in cui viviamo, in cui ci muoviamo.*

La nostra esperienza è collocata in uno *spazio tridimensionale*, il nostro stesso corpo non è una figura piana.

Lo studio della geometria deve dunque estendersi al considerare lo spazio tridimensionale.

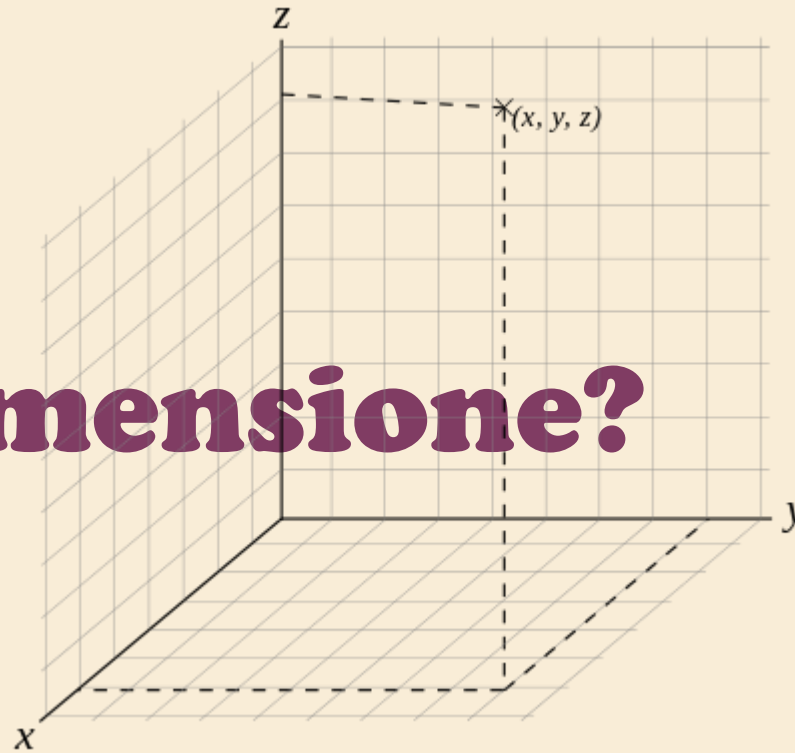
Secondo alcune teorie moderne, oltre allo spazio tridimensionale potrebbero esistere dimensioni aggiuntive, che conterrebbero lo spazio tridimensionale.

Ogni spazio che abbia dimensioni superiori a tre è chiamato *iperspazio*, come caso particolare il *tetraspazio* indica uno *spazio a quattro dimensioni*.

# Dallo spazio tridimensionale allo spazio quadrimensionale

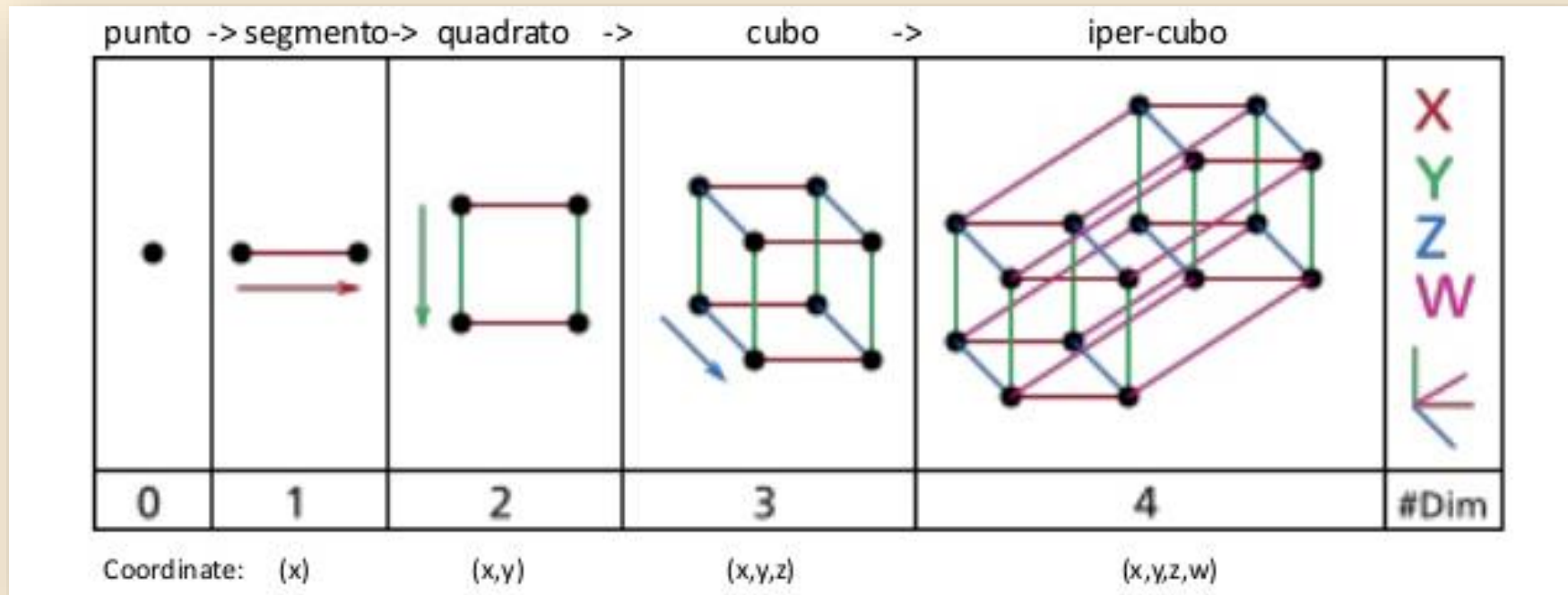
- In uno spazio euclideo tridimensionale, i punti possono essere individuati da tre coordinate cartesiane e insiemi di punti possono costituire rette, piani e volumi.
- In uno spazio euclideo quadridimensionale invece i punti sono individuati da quattro coordinate cartesiane.
- In uno spazio quadridimensionale esistono infiniti spazi tridimensionali, esattamente come in uno spazio tridimensionale esistono infiniti piani, e in un piano infinite rette.
- Così come nello spazio tridimensionale un fascio di piani genera una e una sola retta, nello spazio quadridimensionale un fascio di spazi tridimensionali genera uno ed un solo piano.

# Cos'è la dimensione?



La dimensione è, essenzialmente, il numero di *gradi di libertà* disponibili per il movimento di un punto materiale in uno spazio.

# Dal punto all'ipercubo ... da una dimensione alla successiva



# ELEMENTI DELL'IPERCUBO

L'ipercubo è formato da punti (i vertici), segmenti (i lati), quadrati (facce quadrate), cubi (facce cubiche) e l'ipercubo stesso.

Elementi Dimensione	"Facce" (buccia)	Vertici K=0	Lati K=1	Quadrati K=2	Cubi K=3	Ipercubi	Totale elementi
0	1	1	0	0	0	0	1
1	2 punti	2	1	0	0	0	3
2	4 lati	4	4	1	0	0	9
3	6 quadrati	8	12	6	1	0	27
4	8 cubi	16	32	24	8	1	81
<b>Formula</b>	<b><math>2 \cdot n</math></b>	<b><math>2^n</math></b>	<b><math>n \cdot 2^{n-1}</math></b>	<b><math>\binom{n}{2} 2^{n-2}</math></b>	<b><math>\binom{n}{3} 2^{n-3}</math></b>		<b><math>3^n</math></b>

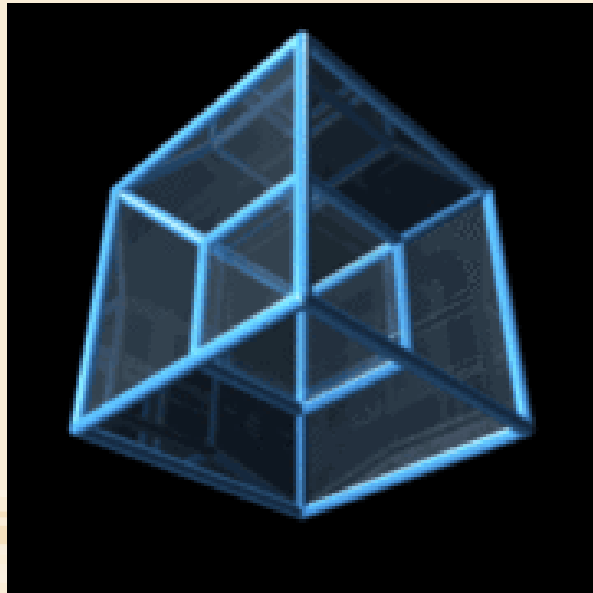
$$N(n; k) = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

- Numero di vertici ( $k = 0$ ):  $N(3; 0) = \binom{3}{0} \cdot 2^{3-0} = 8$
- Numero di spigoli ( $k = 1$ ):  $N(3; 1) = \binom{3}{1} \cdot 2^{3-1} = 12$
- Numero di facce ( $k = 2$ ):  $N(3; 2) = \binom{3}{2} \cdot 2^{3-2} = 6$
- Numero di cubi ( $k = 3$ ):  $N(3; 3) = \binom{3}{3} \cdot 2^{3-3} = 1$

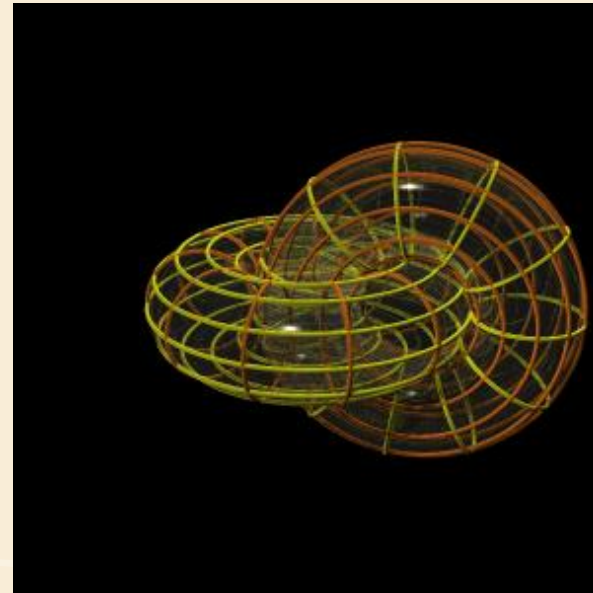
$n$  indica la dimensione e  $k$  la dimensione superficiale



# Oggetti in un tetraspazio



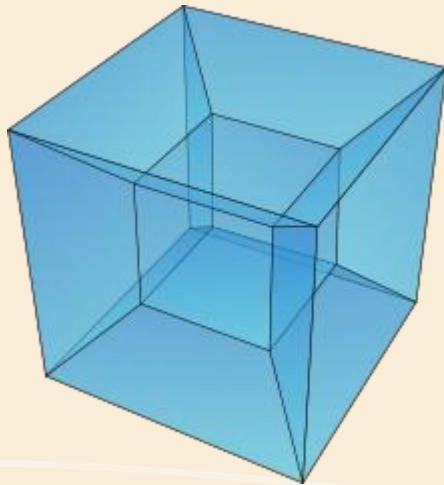
*Ipercubo*



*Ipersfera*

# Oggetti in un tetraspazio - **Ipercubo**

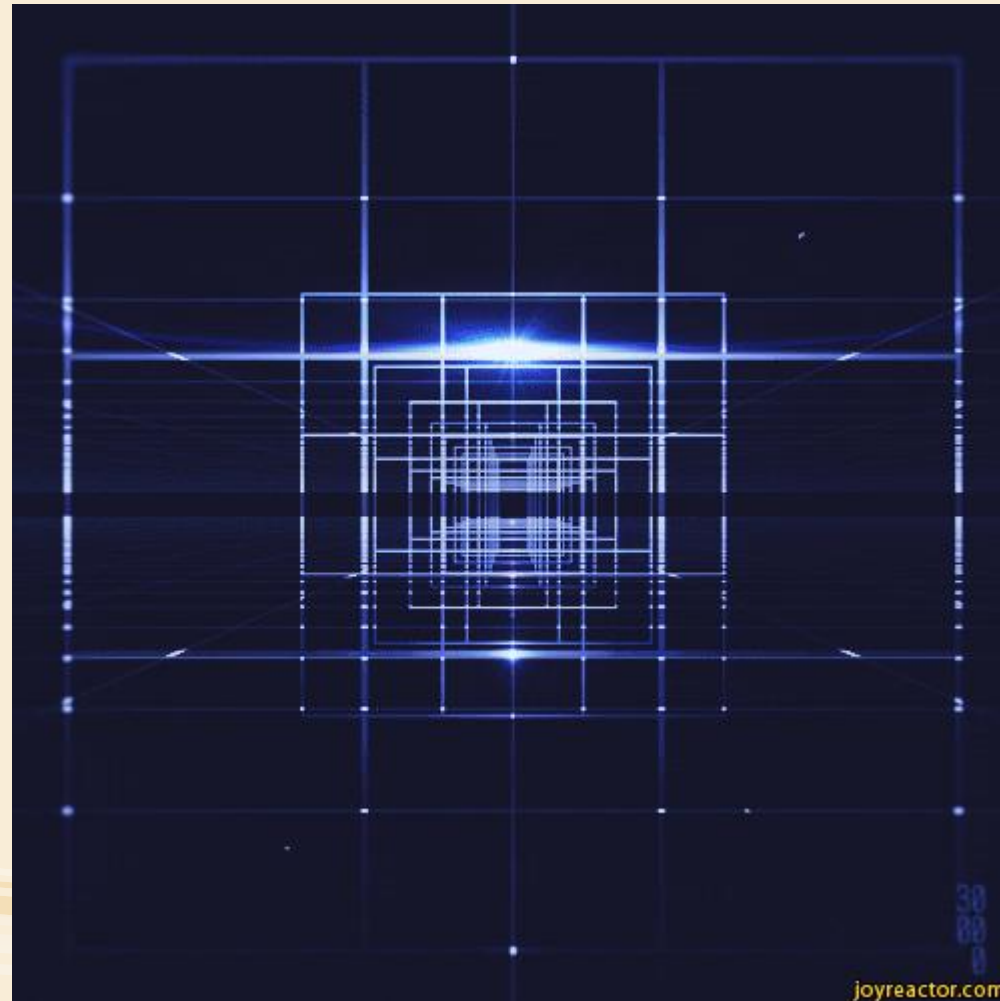
- È il solido geometrico analogo di un cubo a tre dimensioni con una quarta aggiuntiva.
- In dimensione 4, l'ipercubo è chiamato tesseracto.



È costituito da 24 facce bidimensionali quadrate, da 8 facce tridimensionali cubiche, 32 spigoli e da 16 vertici.

L'ipercubo è un politopo, l'analogo multidimensionale di poligoni e poliedri.

# Viaggio nell'ipercubo



# **Il dispiegamento ...**

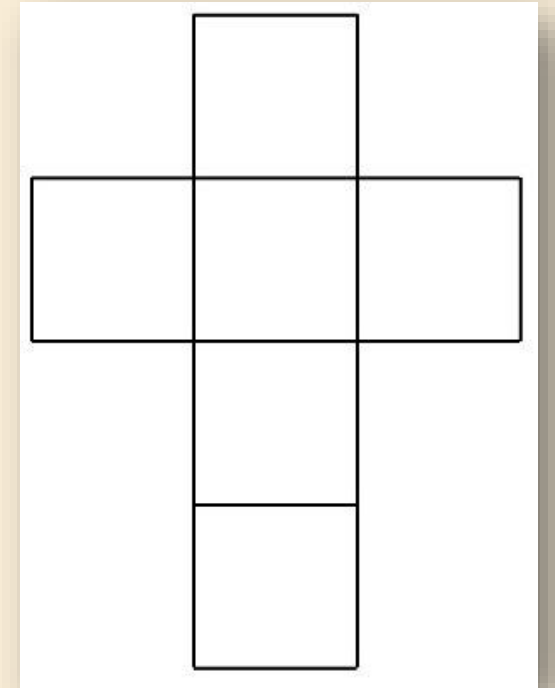
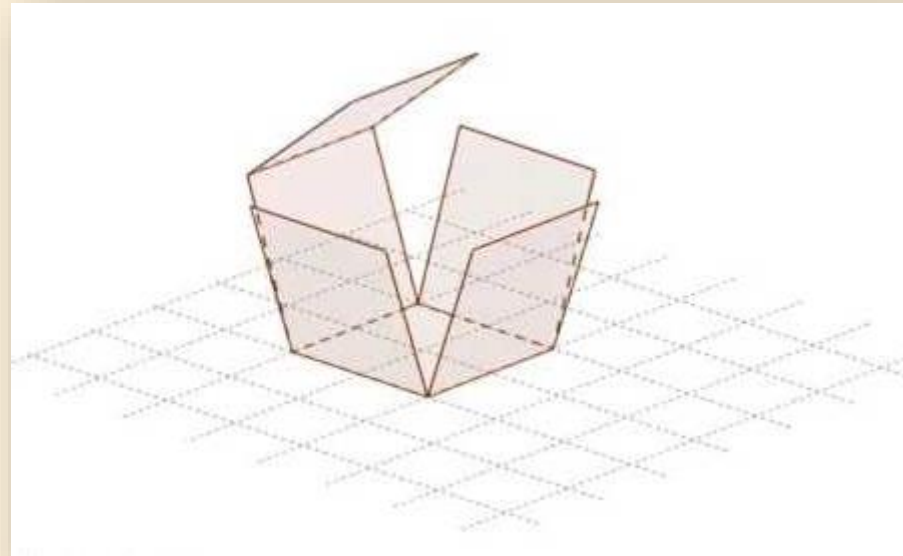
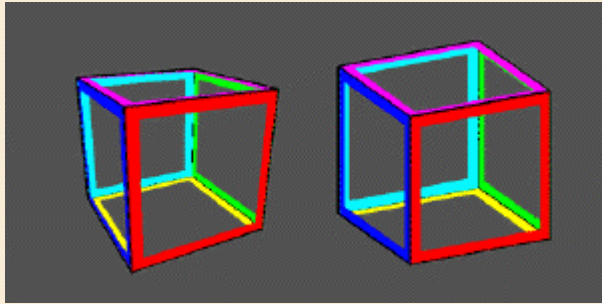
# Dispiegamento di un quadrato



Tagliando un quadrato lungo un vertice si ottiene una linea formata da quattro segmenti congruenti e consecutivi.

***Dispiegando il quadrato si passa dalla seconda dimensione alla prima dimensione.***

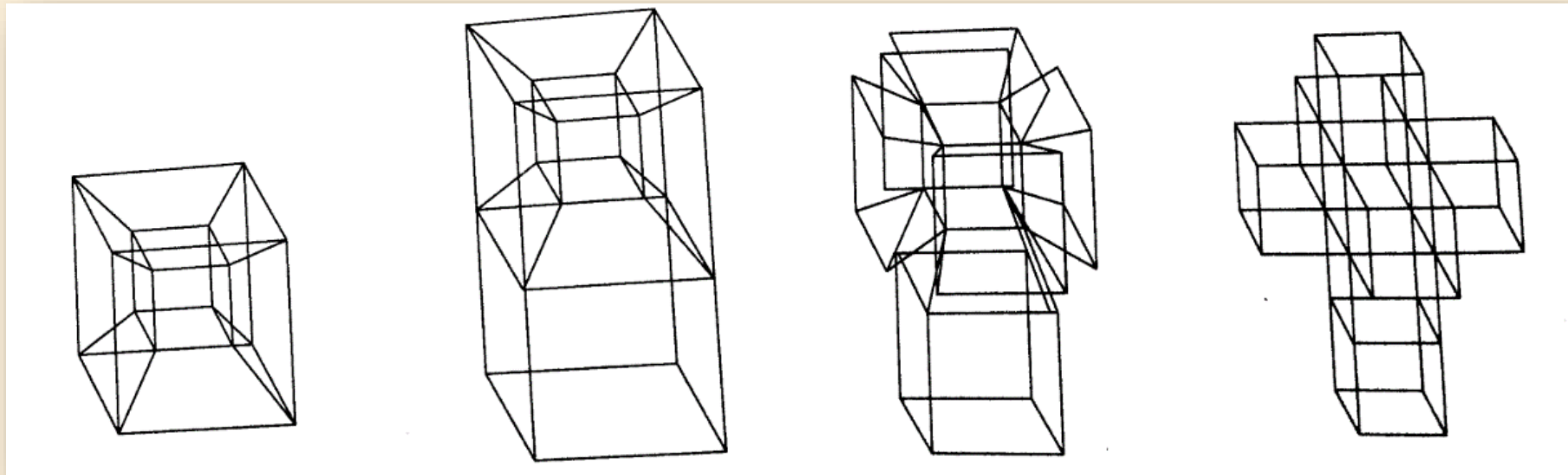
# Dispiegamento di un cubo



Tagliando un cubo lungo alcuni spigoli si ottiene un insieme di 6 quadrati congruenti (*l'esonimo cruciforme*).

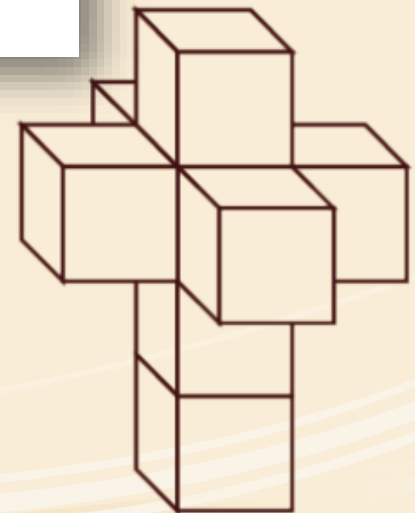
***Dispiegando il cubo si passa dalla terza dimensione alla seconda dimensione.***

# Dispiegamento di un ipercubo



Tagliando il contorno di un ipercubo lungo alcune facce si ottiene una figura tridimensionale formata da otto cubi .

***Dispiegando un ipercubo si passa dalla quarta dimensione alla terza.***



# Ipercubo ha ispirato ...

Tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX secolo la riflessione sulla quarta dimensione diviene un tema di scottante attualità che travalica i confini della geometria per giungere dalla fisica-matematica, alla filosofia, alla letteratura, all'arte, all'architettura,...



# Nell'architettura ... **Grand Arche de la Fraternité**

Monumento moderno situato nel quartiere di La Défense a Parigi



L'Arco è un ipercubo quasi perfetto svuotato al centro (altezza di 110 m, larghezza di 112 m e profondità di 108 m).

All'esterno è ricoperto in marmo di Carrara, in granito grigio e in vetro. La struttura è costituita da 12 pilastri.

# Nella scultura ... l'ipercubo di Pierelli

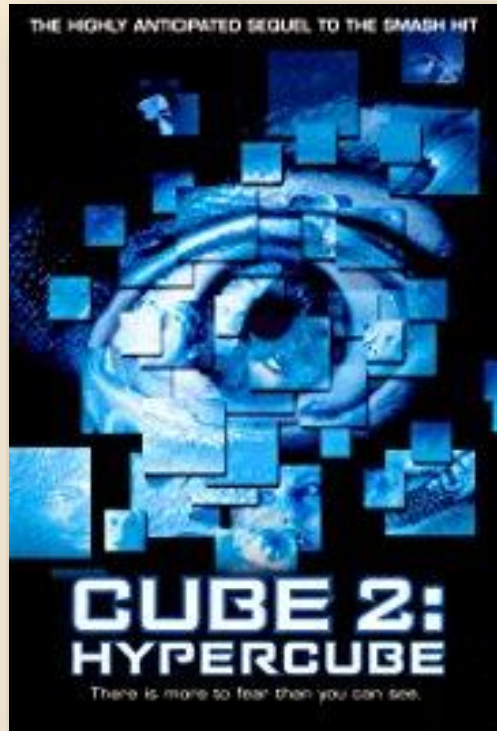


L'opera è situata all'esterno del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma Tor Vergata

L'opera è stata realizzata nel 1974. Lo scultore Attilio Pierelli fonde i principi della scienza con l'arte così generando nello spazio il frutto di lunghi anni di ricerca.

L'ipercubo di Pierelli (promotore del *dimensionalismo*) è sospeso nello spazio infinito, il corpo geometrico è attraversato da raggi luminosi che colpiscono l'interno-massa deformando sul piano la sua immagine.

# Nel cinema ... **Cube 2: Hypercube**



È un film del 2002 diretto da Andrzej Sekuła dove si introduce la quarta dimensione e l'iperspazio.

<https://www.youtube.com/watch?v=zb1TPOy4uBQ>

## La trama ...

Otto sconosciuti (quattro uomini e quattro donne) si risvegliano in un labirinto senza sapere come, quando o perché sono rimasti imprigionati in questa costruzione quadridimensionale (l'hypercube). Per sopravvivere, devono muoversi attraverso una serie infinita di stanze collegate tra loro, anticipando e prevedendo i fenomeni che improvvisamente possono prodursi e disintegrare chiunque rimanga intrappolato. Gli otto prigionieri insieme devono affrontare questo ambiente sconosciuto oltre ai loro segreti, alle loro paure e a loro stessi.

# Nella pittura ... Picasso e il cubismo



*Picasso - ritratto*

Il concetto della quarta dimensione non è sfuggito a **Picasso** che agli inizi del 1900 ha cercato di rappresentare figurativamente come poteva essere la visione del solido dalla quarta dimensione.

Il movimento artistico denominato **Cubismo**, a cui fa capo Picasso, ha avuto più fasi e vari importanti protagonisti come Georges Braque.

Il pensiero di questo movimento viene in aiuto per comprendere la *Quarta Dimensione*.

# Nella pittura ... Picasso e il cubismo



*Les demoiselles d'Avignon*, realizzato nel 1907, il dipinto che dà inizio al cubismo.

Picasso e Braque realizzano quadri nei quali la molteplicità dei punti di vista dell'oggetto rappresentato è portata alle estreme conseguenze: le immagini si compongono di schegge di realtà, viste da angolazioni diverse e ricomposte in una sintesi del tutto originale.

I quadri cubisti non hanno prospettiva né profondità; non distinguono lo sfondo e il primo piano, le forme sono appiattite e i colori sono esclusivamente grigi e bruni.

# Nella pittura ... Duchamp e il cubismo analitico

Marcel Duchamp, membro del gruppo dei cubisti di Puteaux , cercò di visualizzare la quarta dimensione attraverso la propria arte.

Nel 1911 utilizzò gli scacchi come metafora della visualizzazione della quarta dimensione.



*Ritratto di giocatori di scacchi del 1911*

# Nella pittura ... Duchamp e il cubismo analitico

Successivamente iniziò a studiare la rappresentazione statica del movimento.



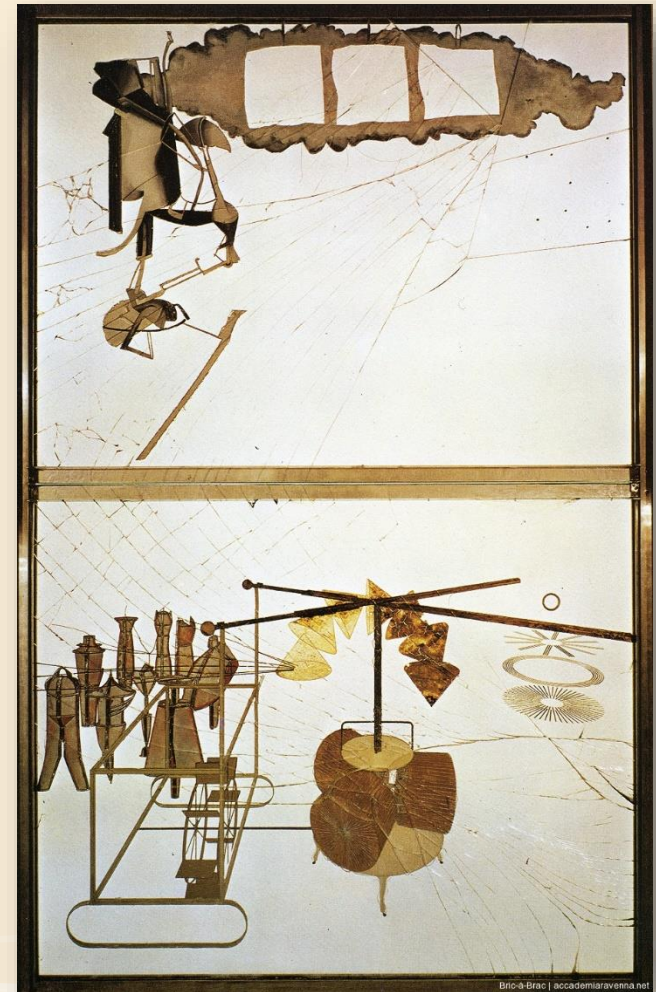
*Nudo che scende una scala, n° 2 realizzato nel 1912*



# Nella pittura ... Duchamp e il cubismo analitico

Alla fine del 1912 iniziò la sua più grande opera *Il grande vetro* che rappresentava la proiezione tridimensionale della sposa che si trova nella quarta dimensione.

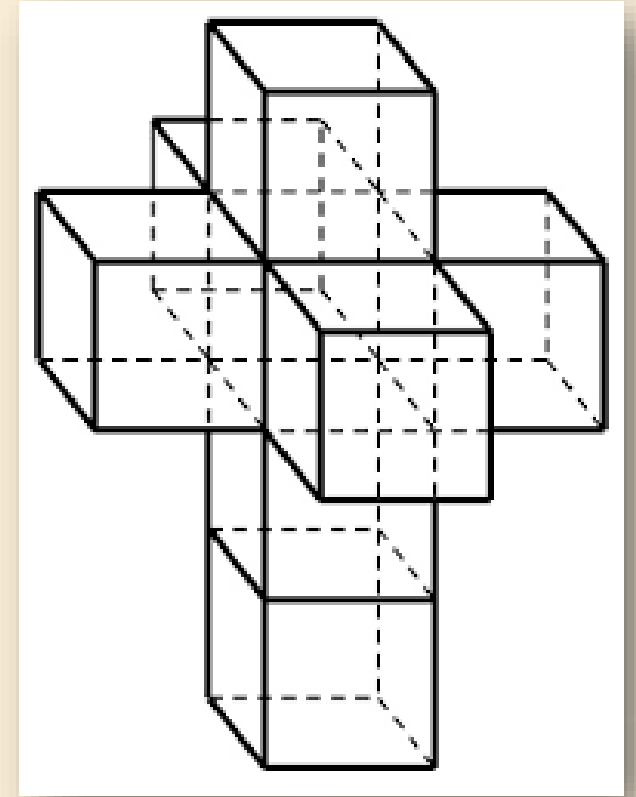
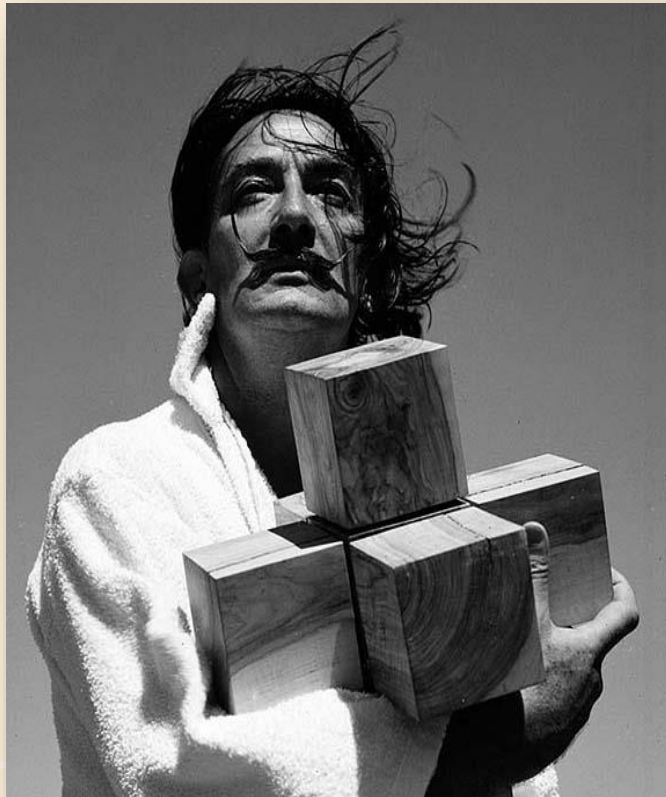
*Gli oggetti presenti nella quarta dimensione erano visti come proiezioni nello spazio tridimensionale.*



La Sposa messa a nudo dai suoi Scapoli, insieme - Il Grande Vetro, 1915-1923

# Nella pittura ... Salvador Dalì e la geometria a quattro dimensioni

L'opera *Crocifissione, corpo ipercubico*, è un dipinto ad olio su tela di 58,4 × 73,7 cm realizzato nel 1954.



Il *crocifisso* è composto da un cubo di partenza + 6 cubi identici attaccati alle 6 facce del cubo + 1 cubo attaccato ad una faccia di un cubo esterno.

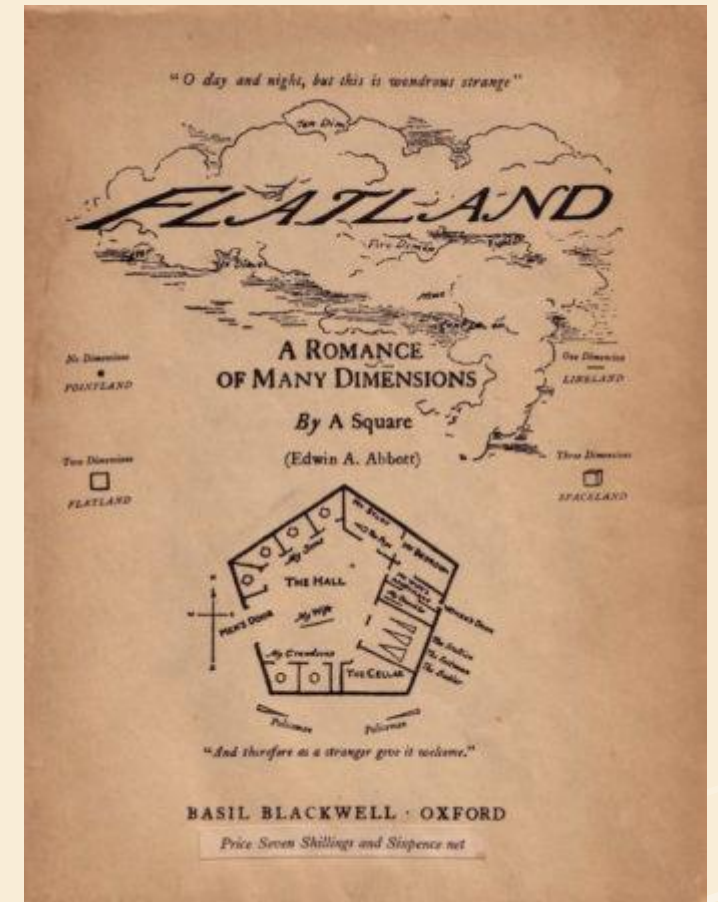
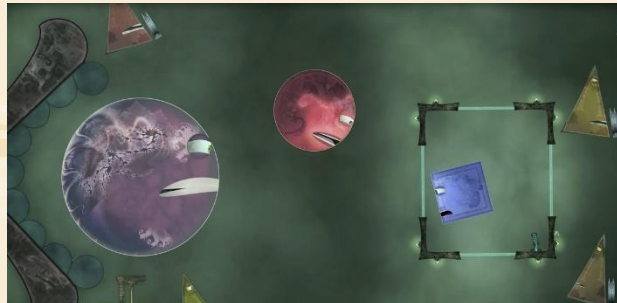
# Nella letteratura ... Fatlandia

*Racconto fantastico a più dimensioni* è un romanzo fantastico-fantascientifico del 1884 scritto da Edwin Abbott Abbott.

Narra la vita di un abitante di un ipotetico universo bidimensionale che entra in contatto con l'abitante di un universo tridimensionale.

Affronta da un punto di vista molto originale il concetto di un mondo a più dimensioni.

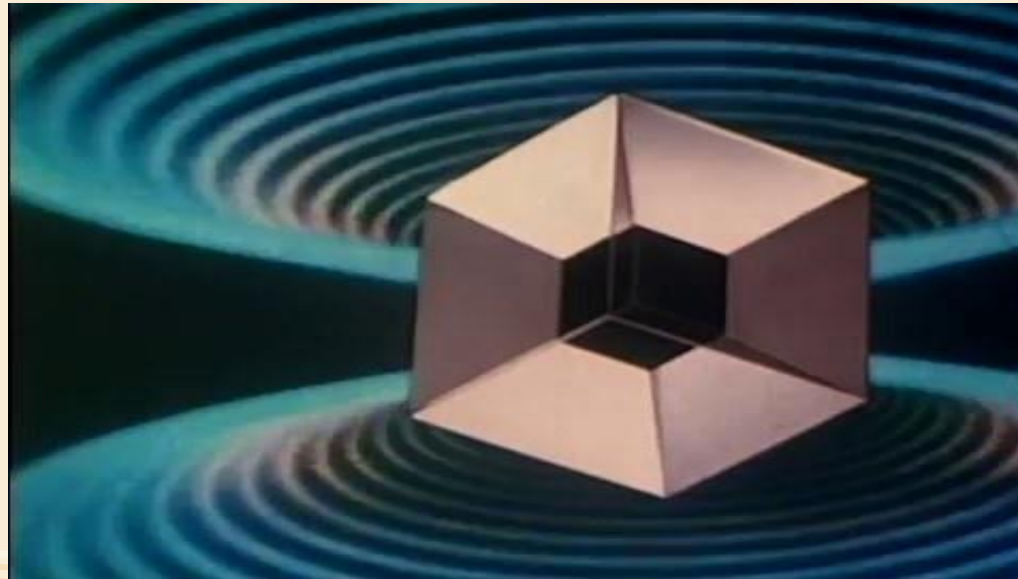
## Trama



Copertina di una delle prime edizioni

# Fatlandia - film

Film di animazione del 1982, tratto dal libro Flatlandia di Edwin Abbott Abbott.



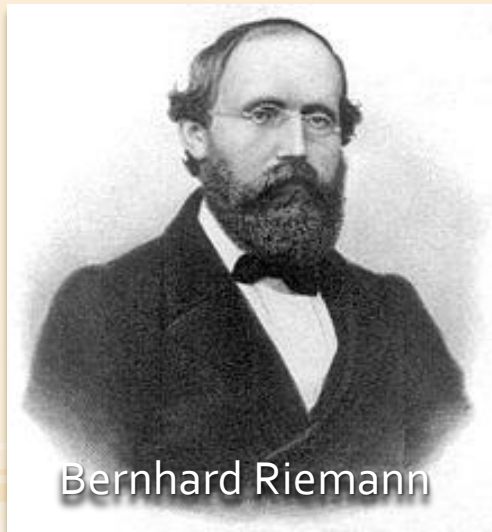
<https://www.youtube.com/watch?v=tNDhjYQKWt4>

# La quarta dimensione e le geometrie non euclidee

*Geometrie non euclidee: geometrie costruite negando o non accettando alcuni postulati euclidei.*

# La quarta dimensione e le geometrie non euclidee

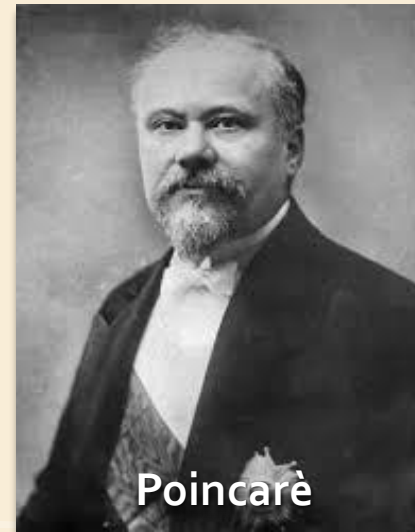
I matematici della fine dell'ottocento si interessarono allo spazio multi-dimensionale e tra questi ricordiamo Riemann che contribuì in modo determinante allo sviluppo delle *geometrie non euclidee*.



Bernhard Riemann



Lobachevskij

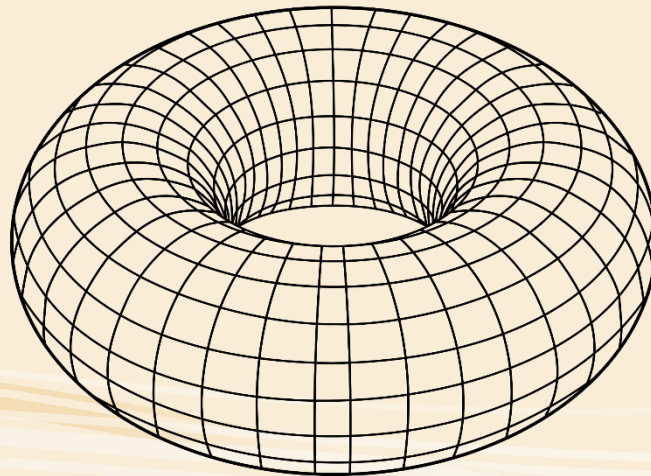


Poincaré

# Cubismo e geometrie non euclidee

Gli artisti cubisti associano il nuovo spazio della pittura alla quarta dimensione e alle *geometrie non euclidee*.

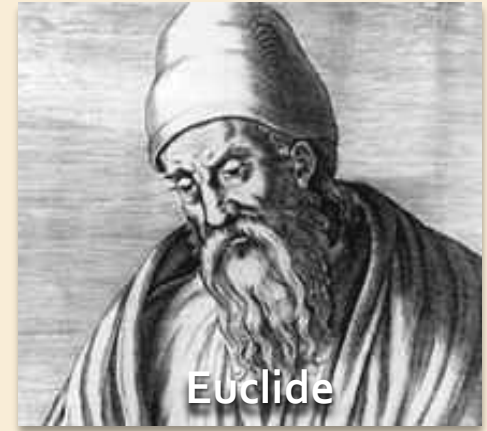
Infatti nello spazio euclideo le figure in movimento sono indeformabili mentre nella geometria di Riemann una figura che si muove su una superficie o nello spazio, cambia la forma.



# **Dalla geometria euclidea alle geometrie non euclidee**



# I postulati di Euclide

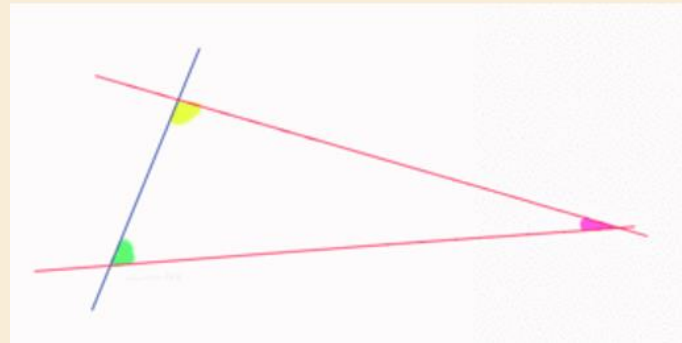


I postulati sono:

1. tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una e una sola retta;
2. si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;
3. dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;
4. tutti gli angoli retti sono congruenti fra loro;

# Il quinto postulato

5. se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.



# Il quinto postulato

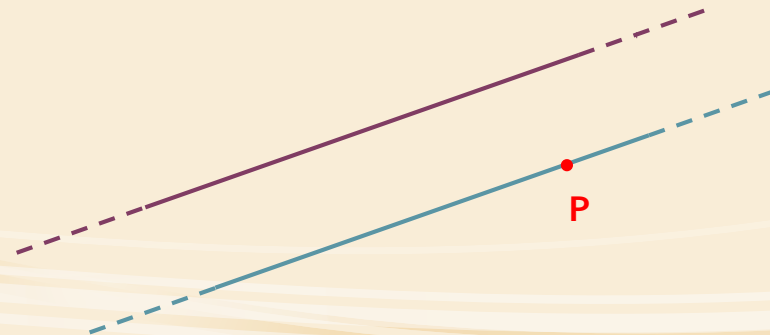
- Si nota subito una differenza tra i primi quattro, che sembrano immediatamente evidenti, e il quinto, che non solo non sembra immediatamente vero, ma ha anche una formulazione molto più complicata degli altri.
- Lo stesso Euclide sembra essere a disagio, tanto che dimostra le prime 28 proposizioni del I libro degli *Elementi* senza farne uso.

# Il quinto postulato

Diverse sono state le formulazioni del V postulato.

Ad esempio:

- 1. Date due rette parallele tagliate da una trasversale, la somma dei due angoli coniugati interni è pari ad un angolo piatto;*
- 2. Dati una qualsiasi retta  $r$  ed un punto  $P$  non appartenente ad essa, è possibile tracciare per  $P$  una ed una sola retta parallela alla retta  $r$  data.*



# Il quinto postulato e le geometrie non euclidee

Furono numerosi i tentativi di provare il V postulato da parte di matematici greci, arabi e rinascimentali.

Tra i tentativi di dimostrazione del V postulato di Euclide un posto di rilievo è occupato da quello del matematico gesuita Padre Giovanni Girolamo **Saccheri** (1667-1733), che cercò di ottenerne una dimostrazione per assurdo.

L'opera di Saccheri, pur non avendo raggiunto lo scopo prefisso, è di grande importanza nella storia della matematica, un primo embrione delle geometrie non euclidee.

Le geometrie non euclidee nascono dalla negazione o dalla riformulazione del V postulato di Euclide.

# Esempi di geometrie non euclidee

- La geometria ellittica di Riemann (in cui viene sostituito il concetto di retta con quello metrico di curva geodetica, ossia il percorso di minor distanza tra due punti e il V assioma viene sostituito con quello che oggi viene indicato come *assioma di Riemann: due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune*).
- La geometria iperbolica sviluppata da Bolyai e Lobachevsky (il V assioma viene modificato in: *data una retta  $r$  e un punto  $P$  disgiunto da  $r$ , esistono almeno due rette distinte passanti per  $P$  e parallele a  $r$* )

# Il modello della geometria di Riemann

Per meglio spiegare la sua teoria Riemann utilizza come modello una *superficie curva*, da cui nasce l'esigenza di introdurre un *valore di curvatura* dello spazio.

Secondo tale valore si possono distinguere tre varietà a curvatura costante:

- varietà a curvatura negativa (geometria di Lobacewskij o iperbolica)
- varietà a curvatura nulla (geometria di Euclide)
- varietà a curvatura positiva (geometria di Riemann o ellittica)

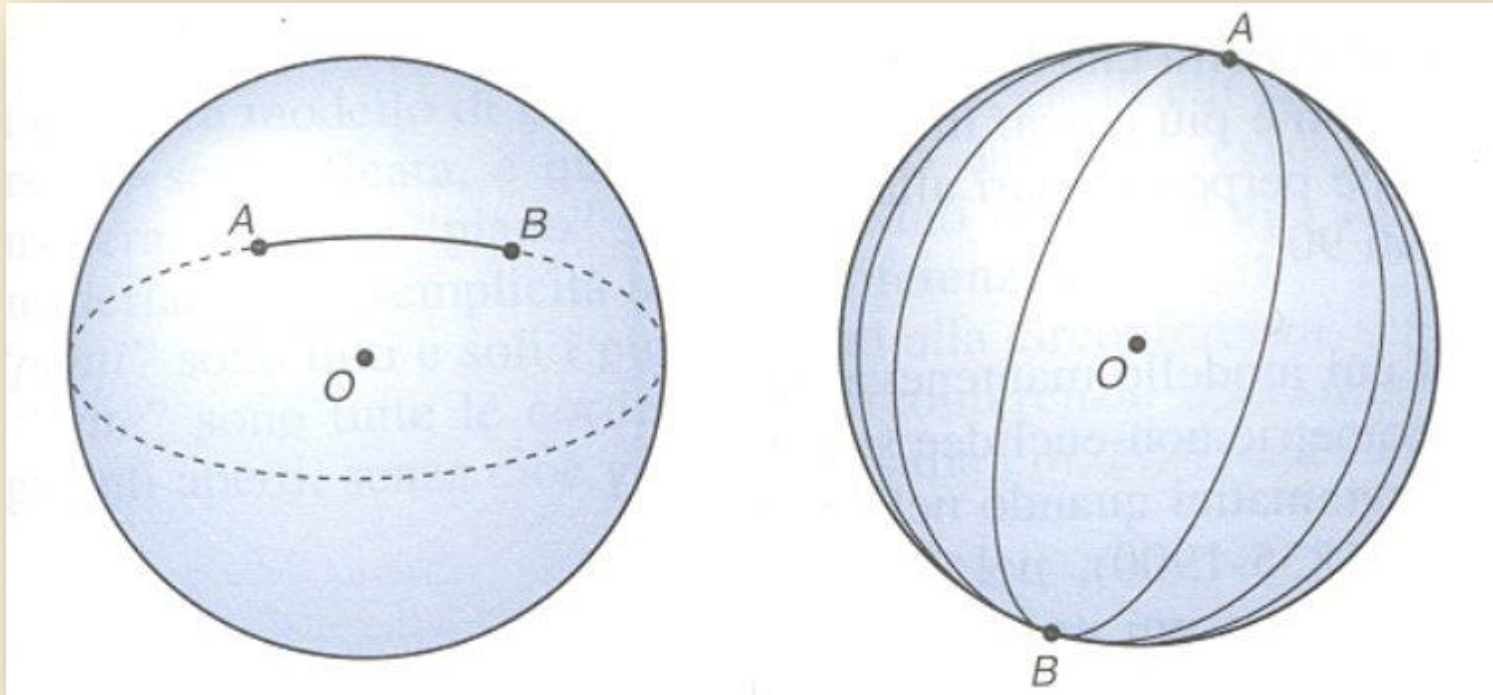
# Il modello della geometria di Riemann

Il modello che Riemann propone è il seguente:

- Il piano è costituito da una superficie chiusa (per comodità potremmo pensare ad una superficie sferica)
- I punti sono i punti su di essa
- Le rette per due punti sono i cerchi massimi passanti per essi
- **É evidente che in questo modello non esistono rette parallele.**



# Il modello della geometria di Riemann

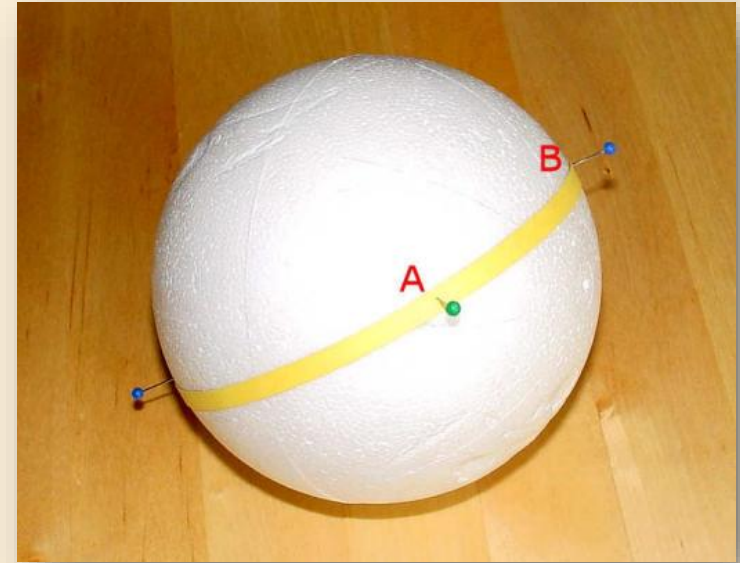


In tale contesto Riemann definisce la linea di minima distanza tra due punti la ***geodetica***, cioè l'arco minore di circonferenza che passa per i due punti ed ha il centro nel centro della sfera.

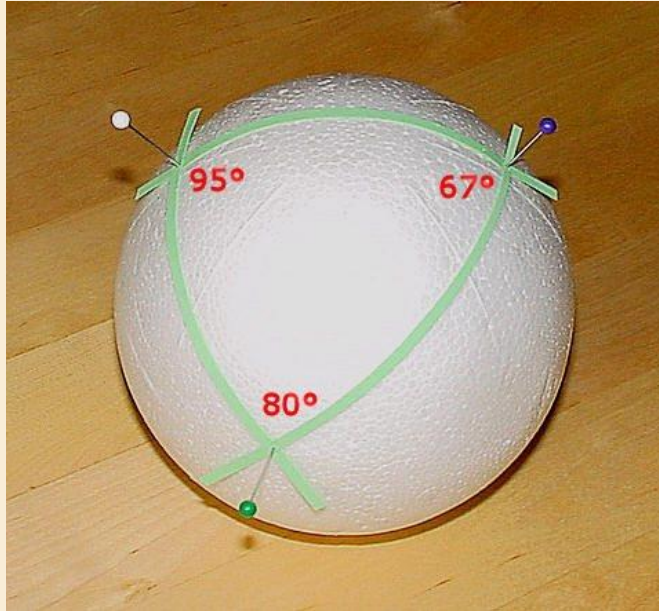
# Un modello della geometria di Riemann

Un modo pratico di realizzare gli archi geodetici (parti di geodetica) è di ritagliare una strisciolina rettilinea di carta e applicarla sulla superficie di una sfera di polistirolo in modo che aderisca senza pieghe.

Per rappresentare un triangolo si considerano tre punti sulla sfera e si uniscono con delle striscioline di carta. I lati sono archi geodetici.



# Un modello della geometria di Riemann



Guardando la sfera si può verificare l'assioma di Riemann: *In un triangolo su una superficie sferica la somma degli angoli interni è  $> 180^\circ$*

Infatti:  $95^\circ + 67^\circ + 80^\circ = 242^\circ > 180^\circ$

e quindi  $\rightarrow$  Curvatura positiva

# **Il futurismo e la quarta dimensione**

*La magnificenza del mondo si è arricchita di una bellezza nuova: la bellezza della velocità.*

# Il futurismo e la quarta dimensione

Il futurismo fornisce una *visione dinamica della quarta dimensione*.

I futuristi rifiutarono la visione statica adottata dai cubisti. Per loro la nuova dimensione era rappresentata dal movimento, lo spazio-tempo nella sua concezione continua.

# La quarta dimensione e Umberto Boccioni



*Forme uniche della continuità dello spazio* è una scultura di bronzo in movimento, un uomo senza braccia, senza forme definite, che si muove nello spazio immergendosi in un'altra dimensione.

L'uomo "buca" lo spazio, supera la tridimensionalità ed entra nel tempo, nella quarta dimensione, dove tutto è misteriosamente unito.

*Forme uniche della continuità dello spazio* - 1913

# La quarta dimensione e Giacomo Balla



*Dinamismo di un cane al guinzaglio* è un quadro ad olio su tela realizzato nel 1912 dal pittore italiano Giacomo Balla.



*Volo di rondini* è un dipinto a tempera fatto su una superficie di carta nel 1913.