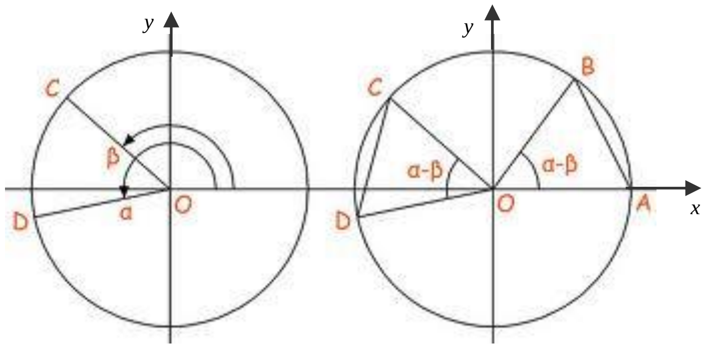
FORMULE GONIOMETRICHE

Le funzioni goniometriche di un angolo orientato non variano proporzionalmente all'angolo.
Ne consegue che, ad esempio, $sen\, 2\alpha$ non è uguale al doppio di $sen\alpha$, che $cos(\alpha+\beta)$ non è uguale a $cos\,\alpha + cos\,\beta$, ecc.
Esempi:

- $sen30° = \frac{1}{2}$ mentre $sen60° = sen(2 \cdot 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 2 \cdot sen30°$.
- $cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos60° = \frac{1}{2}$ mentre $cos\,90° = cos(60° + 30°) = 0 \neq cos60° + cos\,30°$

1. FORMULA DI SOTTRAZIONE DEL COSENO

Consideriamo una circonferenza trigonometrica e due angoli, l'angolo $A\hat{O}D = \alpha$ nel terzo quadrante e l'angolo $A\hat{O}C = \beta$ nel secondo quadrante.
La loro differenza è $C\hat{O}D = \alpha - \beta$.
Costruiamo, nel primo quadrante, l'angolo $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$



Per le definizioni di seno e coseno di un angolo, si ha:

$A(1;0)$, $D(cos\,\alpha; sen\alpha)$, $C(cos\,\beta; sen\beta)$, $B(cos(\alpha-\beta); sen(\alpha-\beta))$

Essendo $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$, le corde $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono congruenti perché corrispondenti di angoli al centro congruenti e quindi si ha:

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{CD}}$$

Applicando la formula della distanza tra due punti, otteniamo:

$$\sqrt{[cos(\alpha-\beta)-1]^2 + sen^2(\alpha-\beta)} = \sqrt{(cos\,\alpha - cos\,\beta)^2 + (sen\alpha - sen\beta)^2}$$
$$\Downarrow$$
$$[cos(\alpha-\beta)-1]^2 + sen^2(\alpha-\beta) = (cos\,\alpha - cos\,\beta)^2 + (sen\alpha - sen\beta)^2$$

Sviluppando i quadrati, si ha:

$$\underline{cos^2(\alpha-\beta)} + 1 - 2cos(\alpha-\beta) + \underline{sen^2(\alpha-\beta)} =$$
$$= \underline{\underline{cos^2\,\alpha}} + \underline{\underline{cos^2\,\beta}} - 2cos\,\alpha\, cos\,\beta + \underline{\underline{sen^2\alpha}} + \underline{\underline{sen^2\beta}} - 2sen\alpha sen\beta$$

Per la prima relazione fondamentale della goniometria, si ha:

$$\underline{\cos^2(\alpha-\beta)}+\underline{sen^2(\alpha-\beta)}=1\,,\ \underline{\underline{\cos^2\alpha}}+\underline{\underline{sen^2\alpha}}=1\,,\ \underline{\underline{\underline{\cos^2\beta}}}+\underline{\underline{\underline{sen^2\beta}}}=1$$

Pertanto la precedente relazione diventa:

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta-2sen\alpha sen\beta$$

da cui si ottiene: $$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$$

2. FORMULA DI ADDIZIONE DEL COSENO

Per avere le formule di addizione basta sostituire nella formula precedente, al posto di β, il valore -β.
Si ottiene:

$$\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+sen\alpha sen(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta}$$

3. FORMULA DI SOTTRAZIONE DEL SENO

Per ottenere la formula di sottrazione del seno, ricordiamo le formule degli angoli associati ed in particolare

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=sen\,\delta\,,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)=-sen\,\delta\ \text{ e }\ sen\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)=\cos\delta$$

Sarà

$$sen(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\alpha\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos\alpha+sen\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)sen\alpha=-sen\beta\cos\alpha+\cos\beta sen\alpha$$

Quindi

$$\boxed{sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta}$$

4. FORMULA DI ADDIZIONE DEL SENO

Per avere le formule di addizione basta sostituire nella formula precedente, al posto di β, il valore -β.
Si ottiene:

$$sen(\alpha-(-\beta))=sen\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha sen(-\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

Quindi

$$\boxed{sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta}$$

5. FORMULA DI SOTTRAZIONE DELLA TANGENTE

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$$

Dividendo per $\cos\alpha\cos\beta$, supposto $\cos\alpha\neq 0, \cos\beta\neq 0$, cioè $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, si avrà:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{sen\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{sen\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

Quindi

$$\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}} \quad \text{con} \quad \alpha,\beta,(\alpha-\beta)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

6. FORMULA DI ADDIZIONE DELLA TANGENTE

Per avere le formule di addizione basta sostituire nella formula precedente, al posto di β, il valore $-\beta$.

Si ottiene:

$$tg(\alpha-(-\beta))=\frac{tg\alpha-tg(-\beta)}{1+tg\alpha tg(-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

Quindi

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}} \quad \text{con} \quad \alpha,\beta,(\alpha+\beta)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

7. FORMULA DI SOTTRAZIONE DELLA COTANGENTE

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{cos(\alpha-\beta)}{sen(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}{sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta}$$

Dividendo per $sen\alpha\cdot sen\beta$, supposto $sen\alpha\neq 0, sen\beta\neq 0$, cioè $\alpha,\beta\neq k\pi$, si avrà:

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{sen\alpha sen\beta}+\dfrac{sen\alpha sen\beta}{sen\alpha sen\beta}}{\dfrac{sen\alpha\cos\beta}{sen\alpha sen\beta}-\dfrac{\cos\alpha sen\beta}{sen\alpha sen\beta}}=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

Quindi

$$\boxed{ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha,\beta,(\alpha-\beta)\neq k\pi$$

8. FORMULA DI ADDIZIONE DELLA COTANGENTE

Per avere le formule di addizione basta sostituire nella formula precedente, al posto di β , il valore - β.
Si ottiene:

$$ctg(\alpha-(-\beta))=\frac{ctg\alpha\cdot ctg(-\beta)+1}{ctg(-\beta)-ctg\alpha}=\frac{-ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{-ctg\beta-ctg\alpha}=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$$

Quindi

$$\boxed{ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}}\quad \text{con}\quad \alpha,\beta,(\alpha+\beta)\neq k\pi$$

9. FORMULE DI DUPLICAZIONE

Per avere le formule di duplicazione basta sostituire nella formula precedente, al posto di β, il valore α.

FORMULA DI DUPLICAZIONE DEL SENO

$$sen(\alpha+\alpha)=sen\alpha\cos\alpha+\cos\alpha sen\alpha=2sen\alpha\cos\alpha$$

Quindi

$$\boxed{sen(2\alpha)=2sen\alpha\cos\alpha}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE DEL COSENO

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-sen\alpha sen\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

Quindi

$$\boxed{\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha}\quad (1)$$

Ricordando che $\cos^2\alpha=1-sen^2\alpha,\ \ sen^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ la (1) diventa:

$$\cos 2\alpha=1-sen^2\alpha-sen^2\alpha=1-2sen^2\alpha$$

oppure

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

<u>In sintesi</u>:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\begin{cases}\cos^2\alpha-sen^2\alpha\\ 1-2sen^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha-1\end{cases}}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE DELLA TANGENTE

$$tg(\alpha+\alpha)=\frac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha tg\alpha}=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Quindi

$$\boxed{tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha\neq\begin{cases}\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

FORMULA DI DUPLICAZIONE DELLA COTANGENTE

$$ctg(\alpha+\alpha)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\alpha-1}{ctg\alpha+ctg\alpha}=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$$

Quindi

$$\boxed{ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha\neq k\frac{\pi}{2}$$

10. FORMULE DI BISEZIONE

Dalle formule di duplicazione, sostituendo 2α con α e α con $\frac{\alpha}{2}$ si ha:

FORMULA DI BISEZIONE DEL SENO

$$\cos 2\alpha=1-2sen^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=1-2sen^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow sen^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

Quindi

$$\boxed{sen\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \quad (2)$$

FORMULA DI BISEZIONE DEL COSENO

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \Rightarrow \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Quindi

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \quad (3)$$

FORMULA DI BISEZIONE DELLA TANGENTE

1. Dividendo membro a membro le formule (2) e (3) e supponendo che sia $\cos\alpha\neq-1$ e quindi $\alpha\neq\pi+2k\pi$, si ottiene:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Quindi

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}\quad \text{con}\quad \alpha\neq\pi+2k\pi$$

2. Moltiplicando e dividendo per $1+\cos\alpha$, con $\alpha\neq k\pi$, si ottiene:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}=\frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Quindi

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}}\quad \text{con } \alpha\neq k\pi,$$

3. Moltiplicando e dividendo per $1-\cos\alpha$, con $\alpha\neq 2k\pi$, si ottiene:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$$

Quindi

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}}\quad \text{con } \alpha\neq k\pi$$

<u>In sintesi</u>:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\begin{cases}\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} & \text{con } \alpha\neq\pi+2k\pi\\[2ex] \dfrac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} & \text{con } \alpha\neq\pi+2k\pi\\[2ex] \dfrac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} & \text{con } \alpha\neq k\pi\end{cases}$$

FORMULA DI BISEZIONE DELLA COTANGENTE

1. Dividendo membro a membro le formule (3) e (2) e supponendo che sia $\cos\alpha\neq-1$ e quindi $\alpha\neq\pi+2k\pi$, si ottiene:

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Quindi

$$\boxed{ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}}\quad \text{con}\quad \alpha\neq 2k\pi$$

2. Moltiplicando e dividendo per $1-cos\alpha$, con $\alpha \neq k\pi$, si ottiene:

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1+cos\,\alpha)(1-cos\,\alpha)}{(1-cos\,\alpha)(1-cos\,\alpha)}} = \pm\sqrt{\frac{1-cos^2\alpha}{(1-cos\,\alpha)^2}} = \frac{sen\alpha}{1-cos\,\alpha}$$

Quindi

$$\boxed{ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\alpha}{1-cos\,\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha \neq 2k\pi$$

3. Moltiplicando e dividendo per $1+cos\alpha$, con $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, si ottiene:

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1+cos\,\alpha)(1+cos\,\alpha)}{(1-cos\,\alpha)(1+cos\,\alpha)}} = \pm\sqrt{\frac{(1+cos\,\alpha)^2}{1-cos^2\alpha}} = \frac{1+cos\,\alpha}{sen\alpha}$$

Quindi

$$\boxed{ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\,\alpha}{sen\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha \neq k\pi$$

In sintesi:

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}} & \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi \\ \dfrac{sen\alpha}{1-cos\,\alpha} & \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi \\ \dfrac{1+cos\,\alpha}{sen\alpha} & \text{con } \alpha \neq k\pi \end{cases}$$

11. FORMULE PARAMETRICHE

Esprimono seno e coseno di un angolo in funzione razionale della tangente dell'angolo metà.

FORMULA PARAMETRICA DEL SENO

Dalle formule di duplicazione, è noto che $sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$

Utilizzando l'espressione $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ possiamo scrivere:

$$sen2\alpha = \frac{2sen\alpha\cos\alpha}{cos^2\alpha + sen^2\alpha}$$

Posto $cos\,\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, dividiamo il numeratore e il denominatore per $cos^2\alpha$

$$sen2\alpha = \frac{2\dfrac{sen\alpha\cos\alpha}{cos^2\alpha}}{\dfrac{cos^2\alpha + sen^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{2\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cancel{cos\,\alpha}}{\cancel{cos\,\alpha}}}{\dfrac{\cancel{cos^2\alpha}}{\cancel{cos^2\alpha}} + \dfrac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

Sostituendo α con $\frac{\alpha}{2}$, si ottiene:

$$sen2\frac{\alpha}{2}=\frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \boxed{sen\alpha=\frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{con} \quad \alpha\neq\pi+2k\pi$$

Spesso, per comodità, si pone $tg\frac{\alpha}{2}=t$, per cui:

$$\boxed{sen\alpha=\frac{2\cdot t}{1+t^2}}$$

FORMULA PARAMETRICA DEL COSENO

In modo analogo si ottiene:

$$cos\,2\alpha=cos^2\alpha-sen^2\alpha \quad\Rightarrow\quad cos\,2\alpha=\frac{cos^2\alpha-sen^2\alpha}{cos^2\alpha+sen^2\alpha}$$

Posto $cos\alpha\neq 0 \Rightarrow \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, dividiamo il numeratore e il denominatore per $cos^2\alpha$

$$cos\,2\alpha=\frac{cos^2\alpha-sen^2\alpha}{cos^2\alpha+sen^2\alpha}=\frac{\frac{\cancel{cos^2\alpha}}{\cancel{cos^2\alpha}}-\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}}{\frac{\cancel{cos^2\alpha}}{\cancel{cos^2\alpha}}+\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}}=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

Sostituendo α con $\frac{\alpha}{2}$, si ottiene:

$$\boxed{cos\,\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{con} \quad \alpha\neq\pi+2k\pi$$

Spesso, per comodità, si pone $tg\frac{\alpha}{2}=t$, per cui:

$$\boxed{cos\,\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \text{con} \quad \alpha\neq\pi+2k\pi$$