IDENTITA' ED EQUAZIONI GONIOMETRICHE

IDENTITA' GONIOMETRICHE

Si definisce ***identità goniometrica*** ogni uguaglianza fra due espressioni contenti funzioni goniometriche di uno o più angoli, che è verificata per qualsiasi valore attribuito agli angoli contenuti (eccetto quei valori per i quali almeno una delle due espressioni perde significato).

Tali identità sono risolvibili in modo analogo alle identità algebriche.
Infatti:

- si può lasciare invariato il secondo membro, e risolvere il primo (sviluppandolo e/o semplificandolo) in modo da ottenere due espressioni identiche.
- si può lasciare invariato il primo membro, e risolvere il secondo (sviluppandolo e/o semplificandolo) in modo da ottenere due espressioni identiche.
- si può operare su entrambi i membri (sviluppandoli e/o semplificandoli) in modo da ottenere due espressioni identiche.

Esempio

Verificare l'identità: $\frac{sen\alpha \cdot \cos\alpha}{1-sen^2\alpha} = tg\alpha$

Trasformando l'espressione al primo membro, si ottiene:

$$\frac{sen\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha} = tg\alpha$$

$$\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$$

$tg\alpha = tg\alpha$ ⇨ l'identità è verificata

EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Si definisce ***equazione goniometrica*** una uguaglianza fra due espressioni goniometriche che viene definita per alcuni valori che si attribuiscono agli angoli.

Per equazione goniometrica ad una incognita si intende un'equazione in cui l'incognita compare come argomento di una o più funzioni goniometriche.

Risolvere un'equazione goniometrica significa determinare gli angoli che sostituiti nell'espressione data restituiscono un'identità.

Esempi:
cos x=1, cos x+sen x=1, sen (x+30°)-1=0, 2 sen^2 x-3 cos x=0

1. EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

In generale, la risoluzione di un'equazione goniometrica si riconduce alla risoluzione di un'equazione elementare del tipo:

sen x = a, cos x = b, tg x = c, ctg x = d

1.1 EQUAZIONI DEL TIPO sen x = a

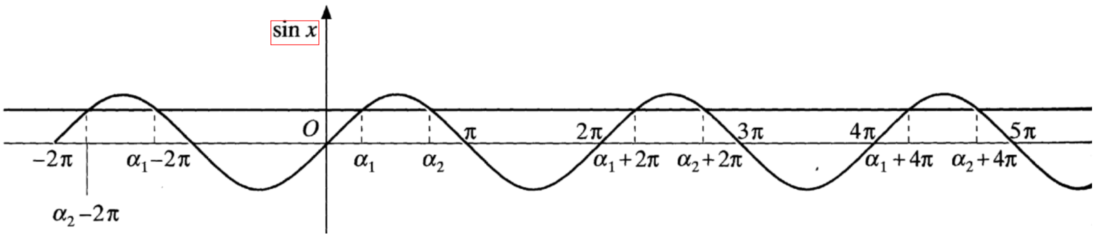
Risolvere l'equazione sen x = a, con -1 ≤ a ≤ 1, vuol dire determinare tutti i valori degli angoli il cui seno vale a.
Le soluzioni minori di un angolo giro sono: un angolo α e l'angolo supplementare (180°-α).
Bisogna però ricordare che il seno è periodico di periodo 360°, quindi, oltre a questi due angoli, sono soluzioni dell'equazione anche quelli che differiscono da essi di un multiplo intero di 360°.
In definitiva, le soluzioni dell'equazione data sono:

$$\begin{cases} x = \alpha + k\,360° \\ x = (180° - \alpha) + k\,360° \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

oppure

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\,\pi \\ x = (\pi - \alpha) + 2k\,\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

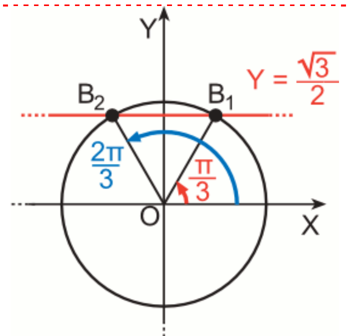
Nell'insieme dei numeri reali $\Re$ le soluzioni dell'equazione senx=a sono infinite:



In particolare

- se $\boxed{a<-1 \text{ o } a>1}$ non ammette soluzioni;
- se $\boxed{a=1}$ ammette la soluzione $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$
- se $\boxed{0<a<1}$ ammette due soluzioni supplementari $\boxed{x_1 = \alpha + 2k\pi}$ e $\boxed{x_2 = \pi - \alpha + 2k\pi}$ (gli angoli x_1 e x_2 appartengono rispettivamente al 1° e al 2° quadrante);
- se $\boxed{a=0}$ ammette due soluzioni: $\boxed{x_1 = 2k\pi}$ o $\boxed{x_2 = \pi + 2k\pi}$
- se $\boxed{-1<a<0}$ ammette due soluzioni: $\boxed{x_1 = \alpha + 2k\pi}$ e $\boxed{x_2 = \pi - \alpha + 2k\pi}$ (gli angoli x_1 e x_2 appartengono rispettivamente al 3° e al 4° quadrante);
- se $\boxed{a=-1}$ ammette la soluzione $\boxed{x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$

Esempio1



Tracciando, quindi, la retta perpendicolare all'asse y e passante per il punto B_1 di ordinata $\frac{\sqrt{3}}{2}$, le intersezioni di questa con la circonferenza ci forniscono immediatamente gli angoli il cui seno è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il seno di *x* assume il valore $\frac{\sqrt{3}}{2}$ in due punti, come si nota dal grafico, e precisamente:

1) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

2) $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

I due valori ottenuti saranno dunque le soluzioni dell'equazione.

Esempio2

$\boxed{sin\ x = \frac{1}{2}}$

Le soluzioni dell'equazione sono:

1) x = 30° + k360°
2) x =(180°-30°)+ k360°⇒ x =150°+ k360°

1.2 EQUAZIONI DEL TIPO cos x = b

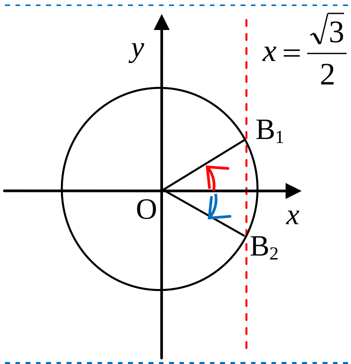
Risolvere l'equazione cos *x* = b, con -1 ≤ b ≤ 1, vuol dire determinare tutti i valori degli angoli il cui coseno vale b.
Le soluzioni minori di un angolo giro sono: un angolo α e l'angolo opposto -α.
Bisogna però ricordare che il coseno è periodico di periodo 360°, quindi, oltre a questi due angoli, sono soluzioni dell'equazione anche quelli che differiscono da essi di un multiplo intero di 360°.
In definitiva, le soluzioni dell'equazione data sono:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

od anche $x = \pm\alpha + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$

Esempio

$\boxed{\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$



Tracciando, quindi, la retta perpendicolare all'asse x e passante per il punto B_1 di ascissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$, le intersezioni di questa con la circonferenza ci forniscono immediatamente gli angoli il cui coseno è $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il coseno di *x* assume il valore $\frac{\sqrt{3}}{2}$ in due punti, come si nota dal grafico, e precisamente:

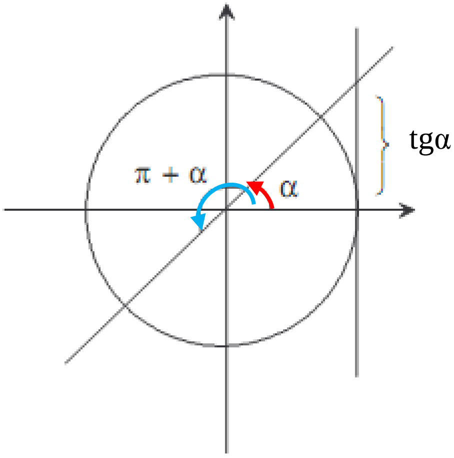
1) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

2) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

I due valori ottenuti saranno dunque le soluzioni dell'equazione.

1.3 EQUAZIONI DEL TIPO tg x = c

Risolvere l'equazione tg x = c, con c numero reale qualunque, vuol dire determinare tutti i valori degli angoli la cui tangente vale c.



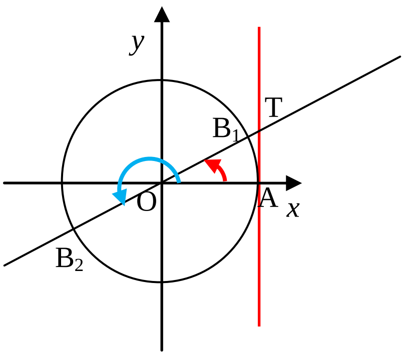
Le soluzioni minori di un angolo giro sono: un angolo α e l'angolo che differisce di un angolo piatto da α.
Bisogna però ricordare che la tangente è periodica di periodo 180°, quindi, oltre a questi due angoli, sono soluzioni dell'equazione anche quelli che differiscono da essi di un multiplo intero di 180°.
In definitiva, le soluzioni dell'equazione data sono:

$$x = \alpha + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

L'equazione tg x = c è sempre possibile qualunque sia il numero reale c

Esempio

$\boxed{tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}}$



$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$