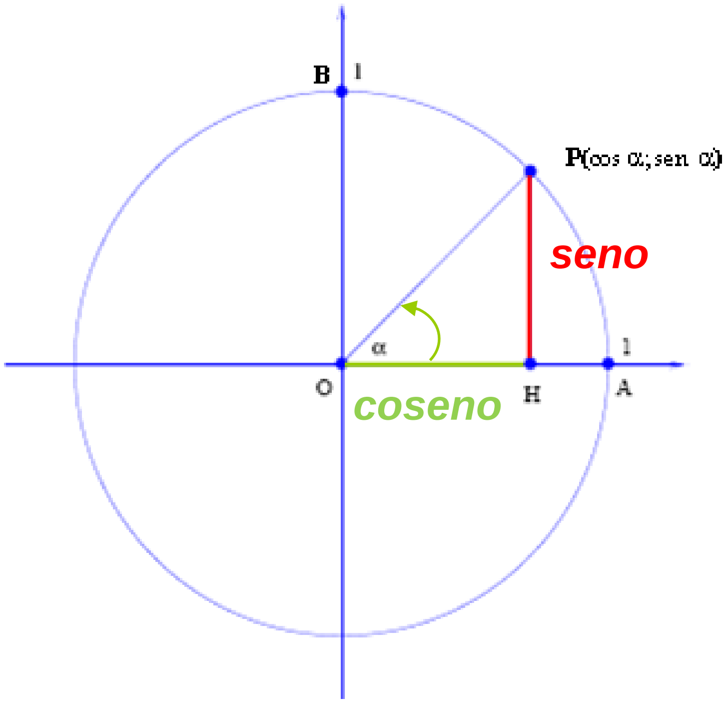
LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Prof.ssa CaterinaVespia

LE FUNZIONI SENO E COSENO

Detto **P** il punto sulla circonferenza che è associato all'angolo α, e H il punto della proiezione di P sull'asse delle x, si definisce:



- ***seno*** dell'angolo α l'ordinata del punto P, cioè la misura del segmento PH rispetto all'unità di misura.

$$u = OP \Rightarrow sen\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}$$

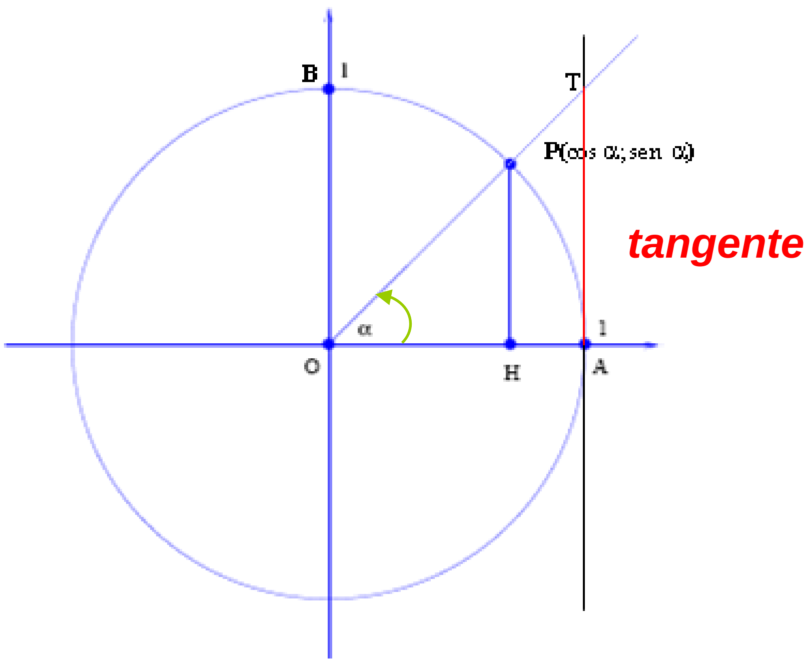
- ***coseno*** dell'angolo α l'ascissa del punto P, cioè la misura del segmento OH rispetto all'unità di misura.

$$u = OP \Rightarrow cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}}$$

LA FUNZIONE TANGENTE

Detto **T** il punto di intersezione tra il secondo lato dell'angolo α e la tangente geometrica alla circonferenza nel punto in cui questa interseca il semiasse positivo delle ascisse, si definisce:

- ***tangente*** dell'angolo α l'ordinata del punto T, cioè la misura del segmento TA rispetto all'unità di misura

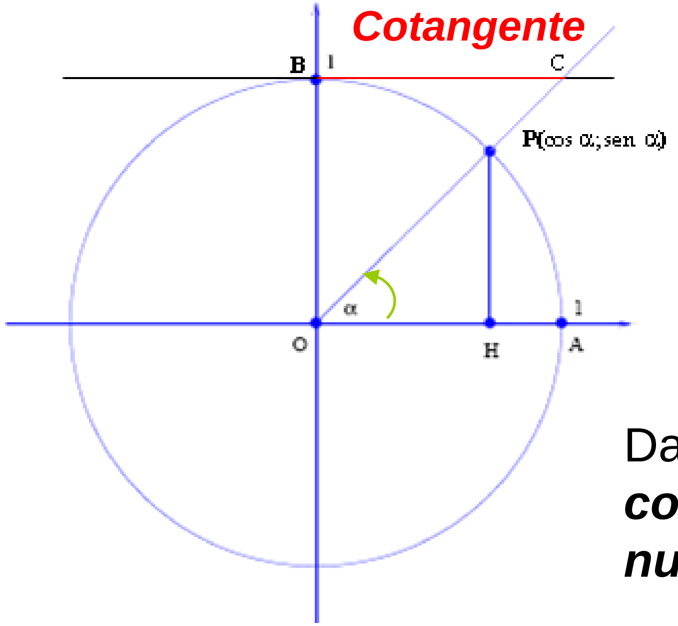


$$u = OP \quad \Rightarrow \quad tag\alpha = \frac{\overline{TA}}{\overline{OP}}$$

LA FUNZIONE COTANGENTE

Detto **C** il punto di intersezione tra il secondo lato dell’angolo α e la tangente geometrica alla circonferenza nel punto in cui questa interseca il semiasse positivo delle ordinate, si definisce:

- ***cotangente*** dell’angolo α l’ascissa del punto C, cioè la misura del segmento CB rispetto all’unità di misura



$$u = OP \Rightarrow cotg\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{OP}}$$

Dalle definizioni date si deduce che il ***seno***, il ***coseno***, la ***tangente*** e la ***cotangente*** sono ***numeri reali relativi***.

Il seno, il coseno, la tangente e la cotangente sono **funzioni dell’angolo** α, cioè sono numeri reali che dipendono esclusivamente dall’ampiezza dell’angolo α.

VARIAZIONE DEL SENO, DEL COSENO, DELLA TANGENTE E DELLA COTANGENTE AL VARIARE DELL'ANGOLO A.

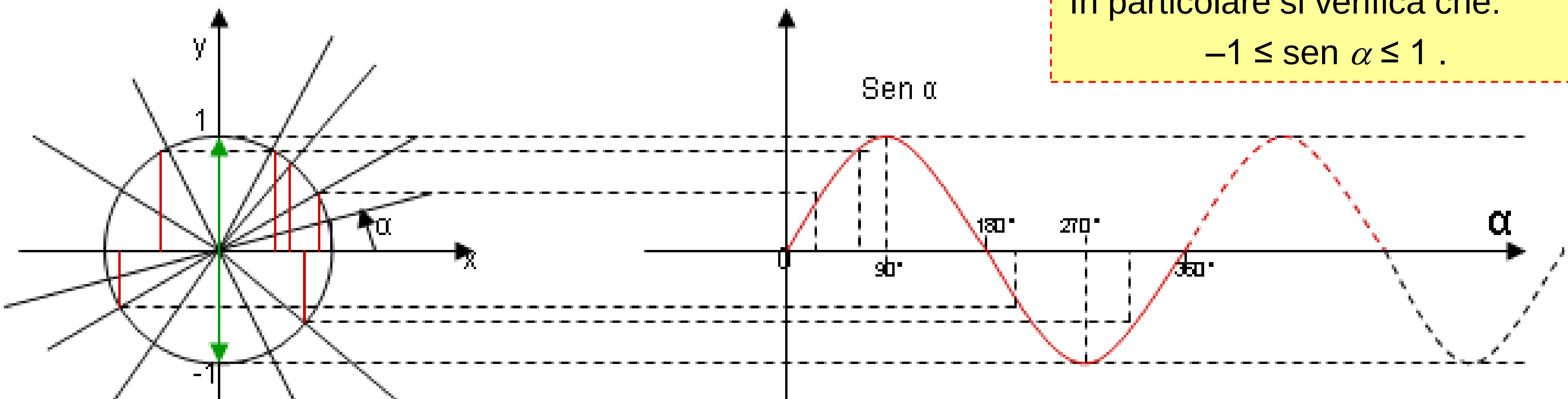
VARIAZIONE DEL SENO

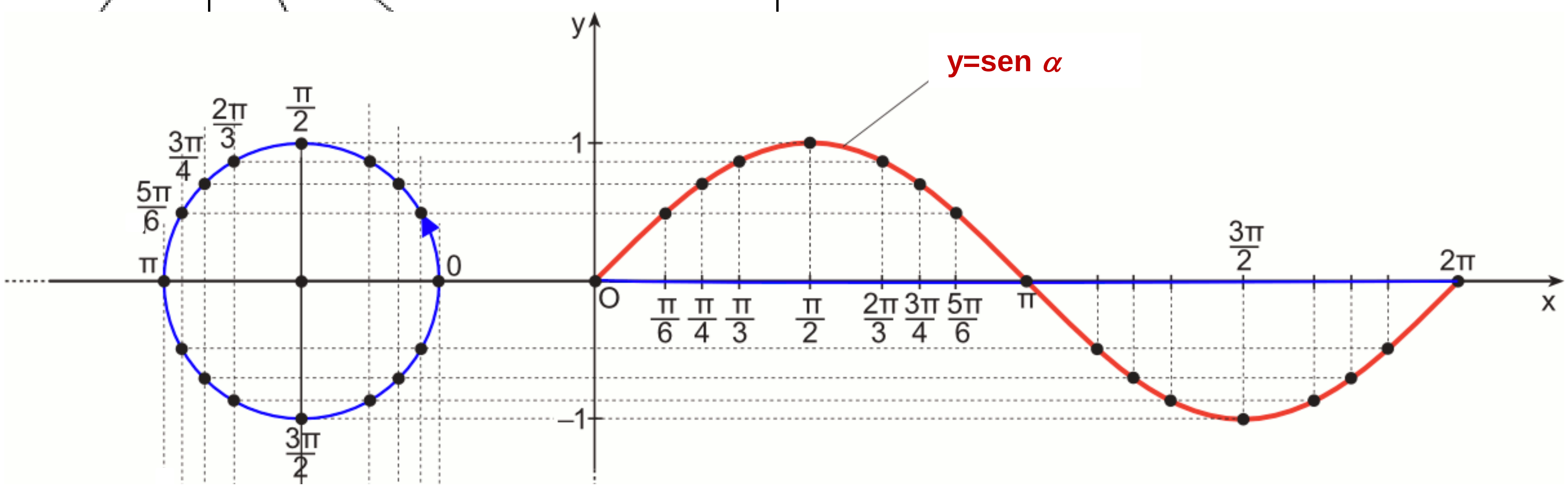
Costruiamo il grafico delle funzioni ***y* = sen α** in **[0; 2π]** riportando sull'asse *x* i valori degli angoli e sull'asse *y* le coordinate dei punti della circonferenza goniometrica.

PROPRIETÀ

In particolare si verifica che:

$$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1\ .$$

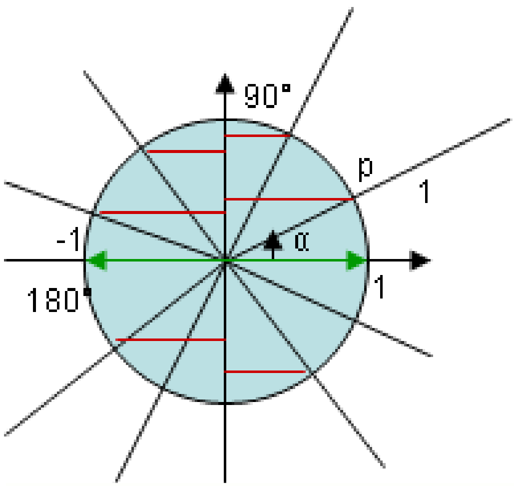


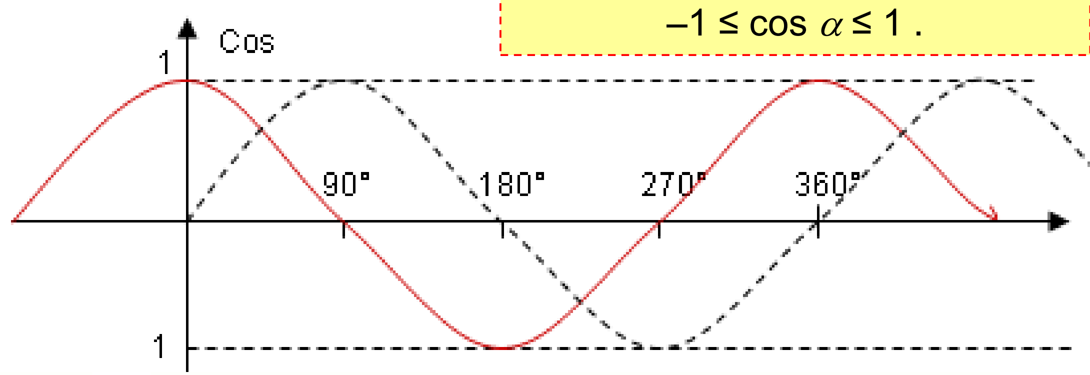


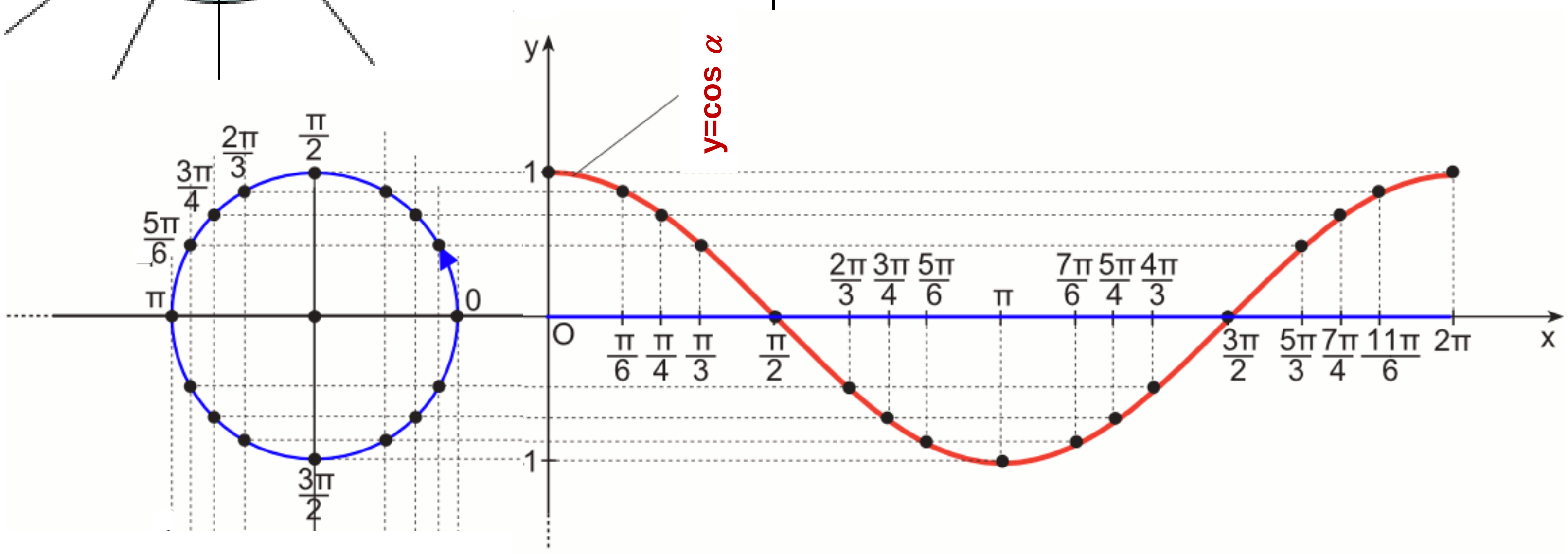
VARIAZIONE DEL COSENO

Costruiamo il grafico delle funzioni ***y* = cos α** in **[0; 2π]** riportando sull'asse *x* i valori degli angoli e sull'asse *y* le coordinate dei punti della circonferenza goniometrica.

PROPRIETÀ
In particolare si verifica che:
$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

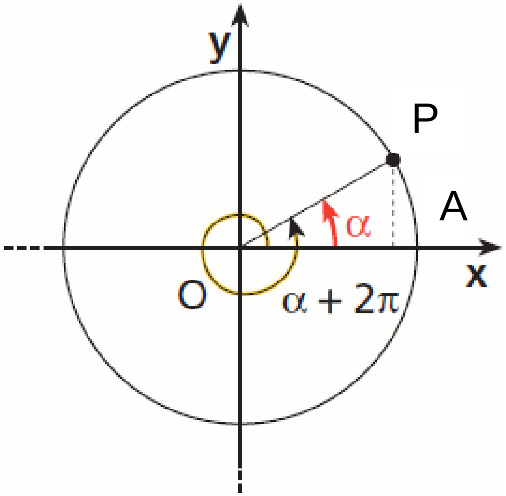






Prof.ssa CaterinaVespia

SINUSOIDE E COSINUSIDE



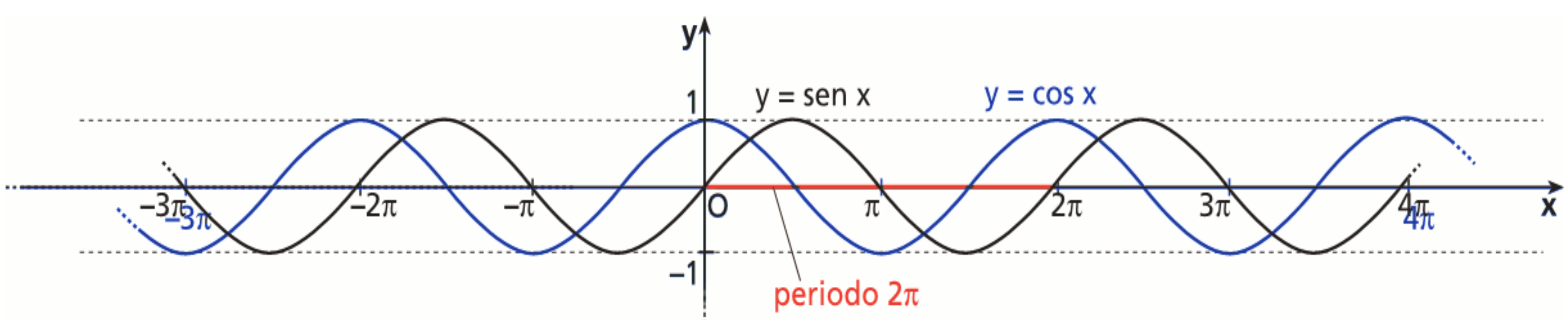
sen (α + 2π) = sen α = sen (α + 4π) = ... ,
cos (α + 2π) = cos α = cos (α + 4π) = … ,

cioè
sen (α + 2kπ) = sen α ,
cos (α + 2kπ) = cos α .

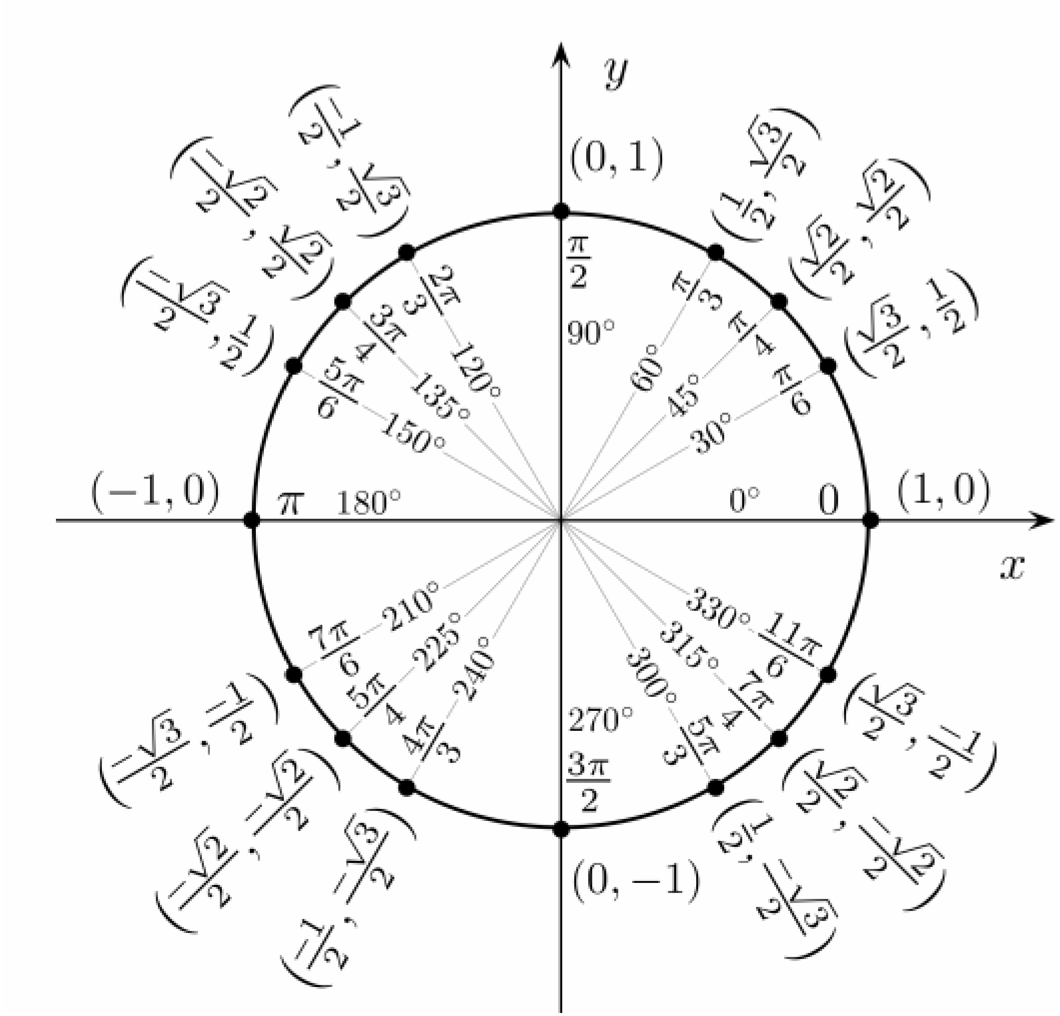
Le funzioni seno e coseno sono **periodiche** di periodo **2π** .

Il grafico completo della funzione seno si chiama **sinusoide**, quello della funzione coseno **cosinusoide**.

I due grafici differiscono per una traslazione di **π/2**.

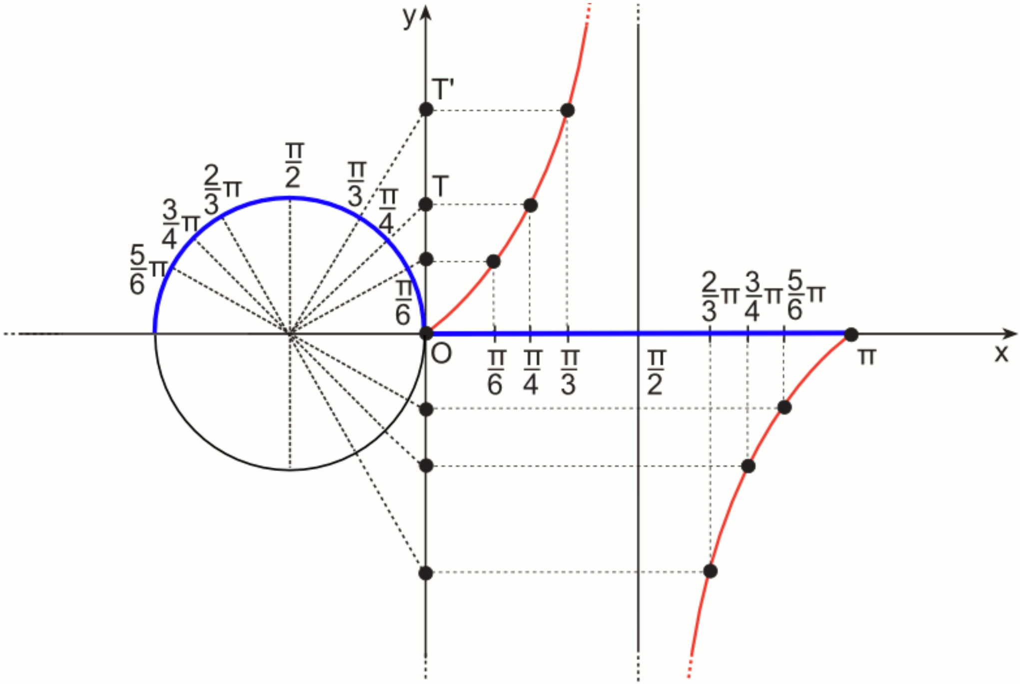


VALORI DEL SENO E DEL COSENO



VARIAZIONE DELLA TANGENTE

Costruiamo il grafico della funzione $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\ \alpha}$ in $\boldsymbol{[0;\pi]}$ riportando sull'asse *x* i valori degli angoli e sull'asse *y* l'ordinata del punto **T**.

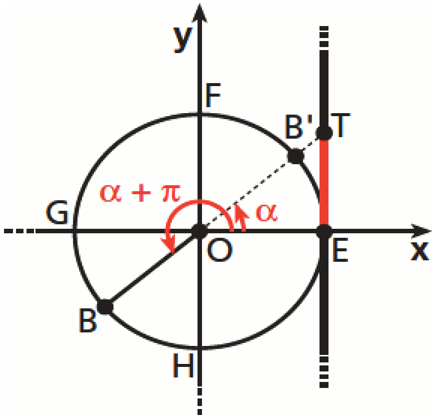


PROPRIETÀ

In particolare si verifica che:

tg α tende a $+\infty$ o $-\infty$ quando α si avvicina a $\pi/2$.

LA TANGENTOIDE

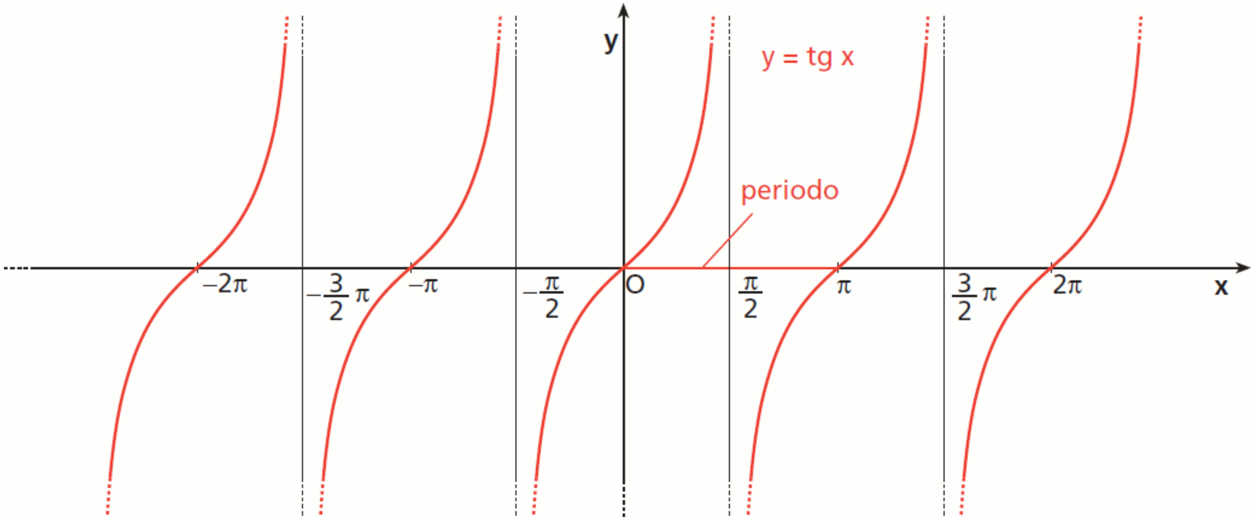


tg (α + π) = tg α = tg (α + 2π) = ...

cioè

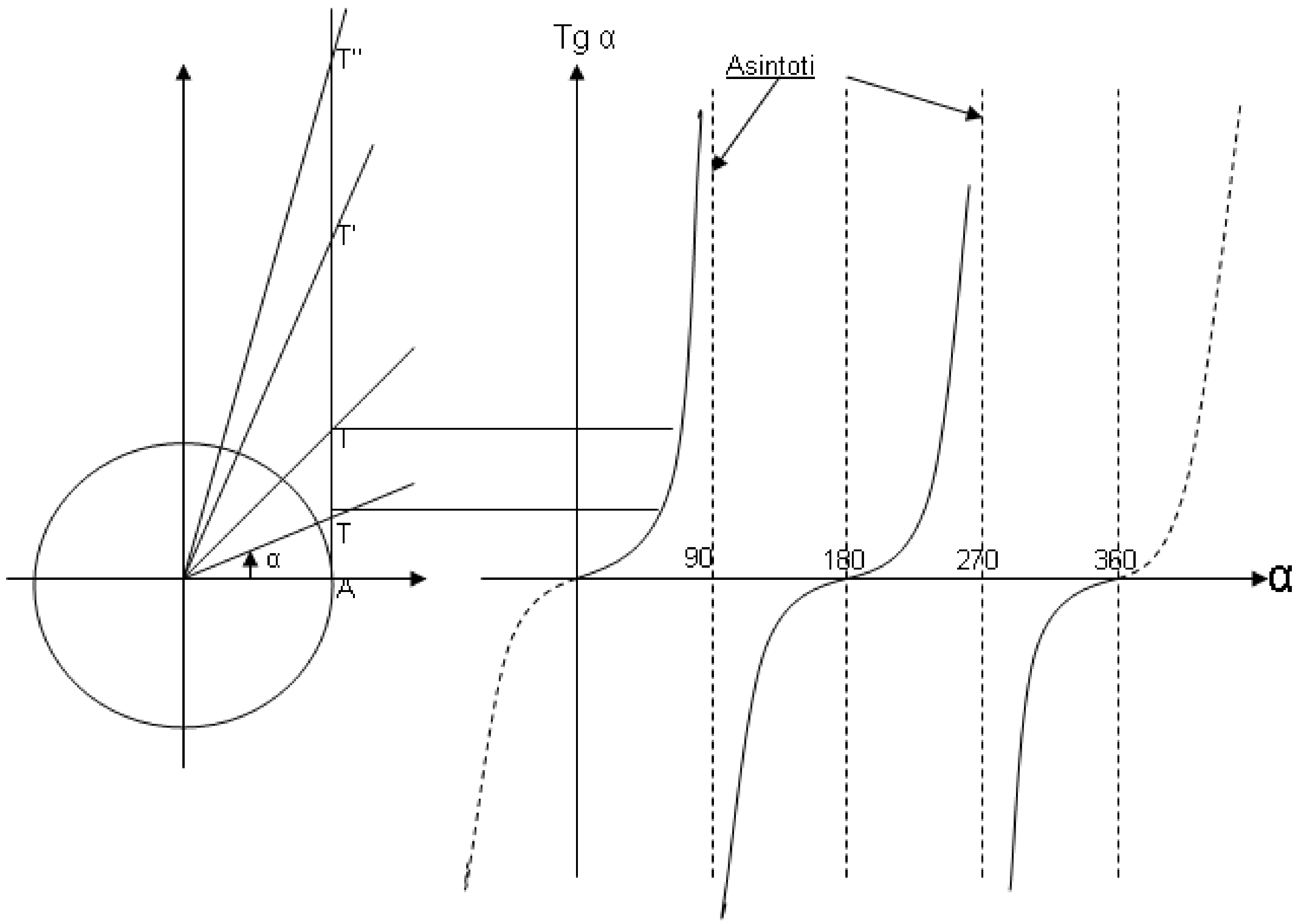
tg (α + *k*π) = tg α *.*

La funzione tangente è **periodica** di periodo π .



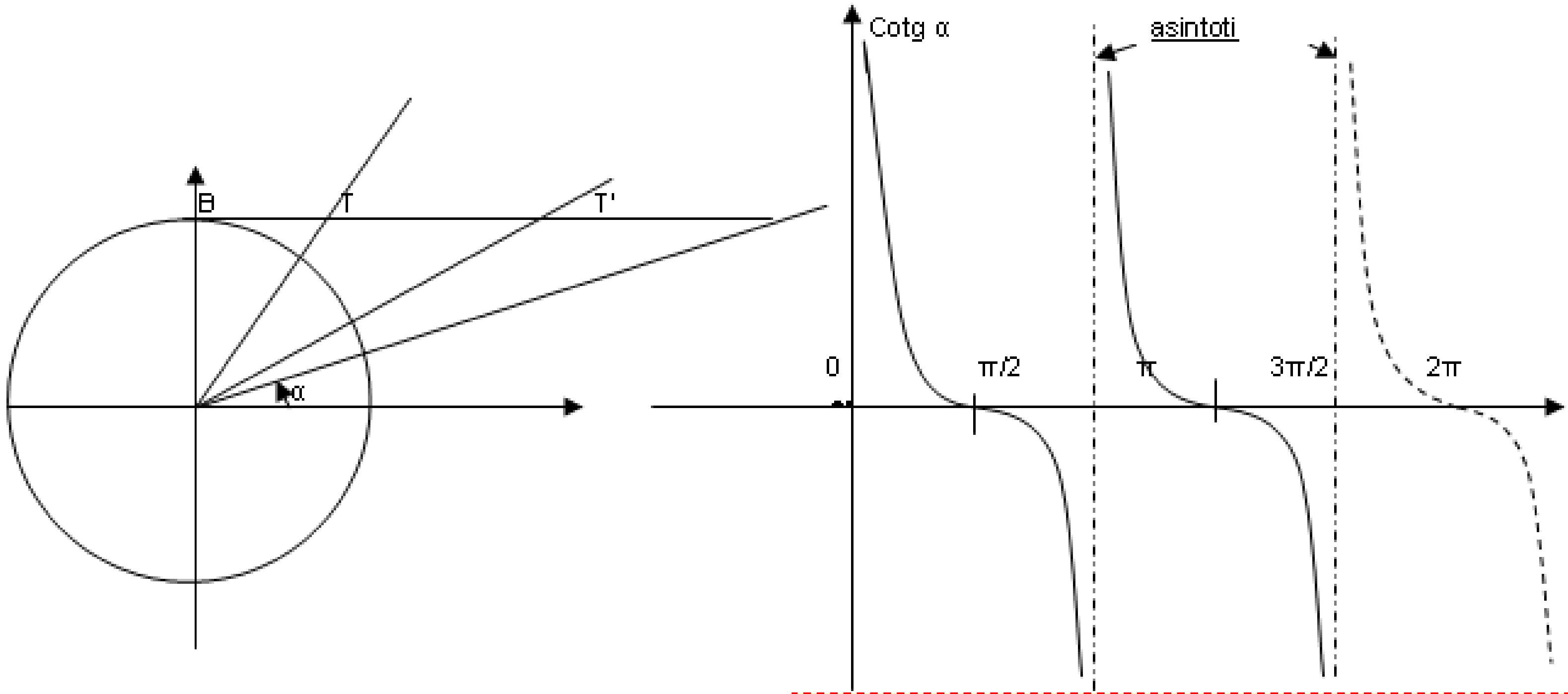
Il grafico completo della funzione tangente si chiama **tangentoide**.

LA TANGENTOIDE



VARIAZIONE DELLA COTANGENTE

Costruiamo il grafico della funzione ***y* = cotg α** in **[0;π]** riportando sull'asse *x* i valori degli angoli e sull'asse *y* l'ordinata del punto **T**.

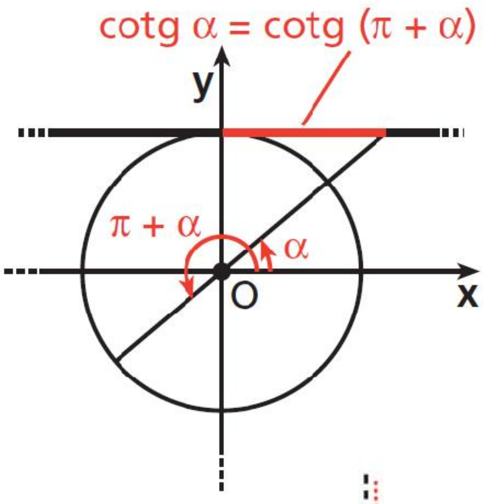


PROPRIETÀ

In particolare si verifica che:

cotg α tende a $+\infty$ o $-\infty$ quando α si avvicina a 0 e a π.

LA COTANGENTOIDE

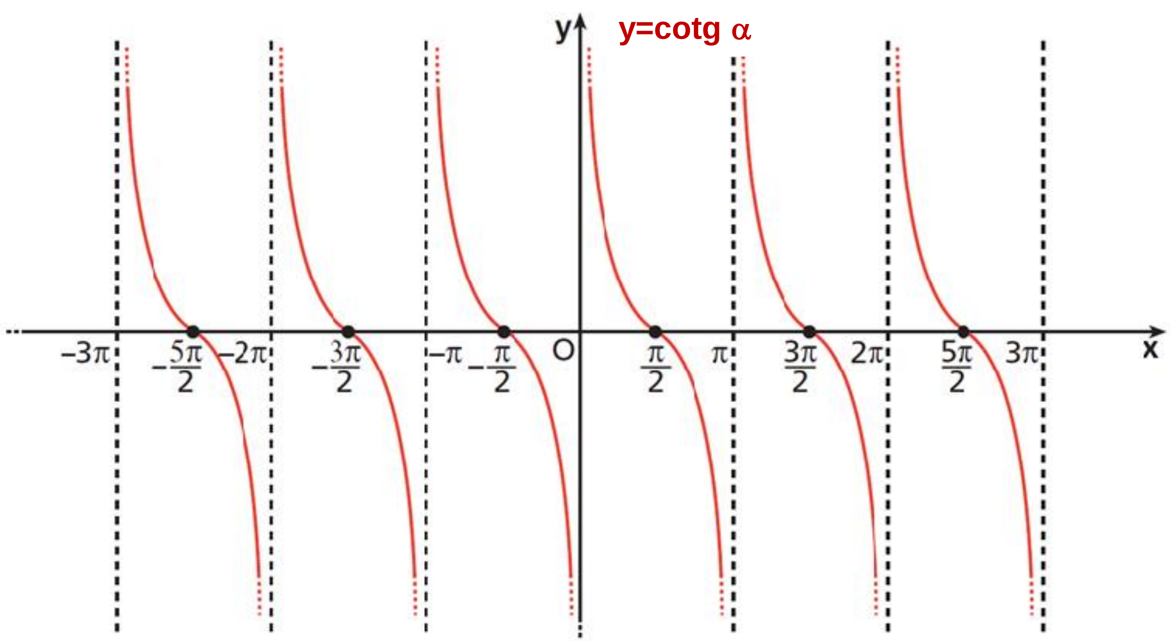


cotg (α + π) = cotg α = cotg (α + 2π) = ...

cioè

cotg (α + *k*π) = cotg α *.*

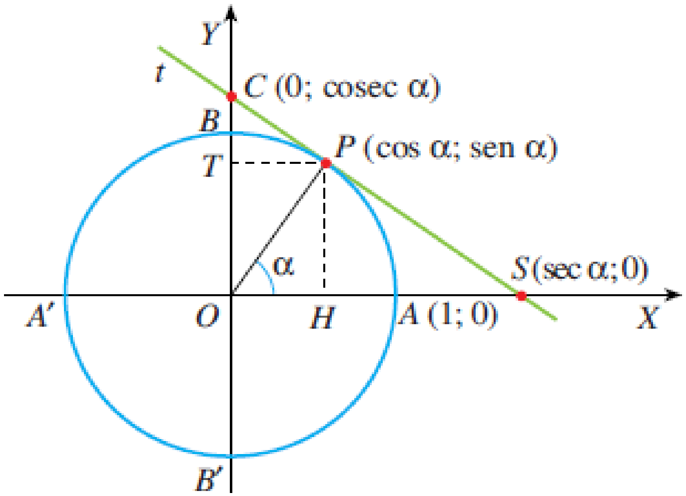
La funzione cotangente è **periodica** di periodo π .



Il grafico completo della funzione cotangente si chiama **cotangentoide**.

LE FUNZIONI SECANTE E COSECANTE

Consideriamo ora la retta *t* tangente alla circonferenza goniometrica nel punto *P* e siano *S* e *C* le sue intersezioni con gli assi *X* e *Y.*



- L'ascissa del punto ***S*** è detta **secante di α** e si indica con la scrittura **sec α.**
- L'ordinata del punto ***C*** è detta **cosecante di α** e si indica con la scrittura **cosec α**.

Se *P* ≡ *B* o *P* ≡ *B′* il punto *S* non esiste, perciò **sec α** si definisce per

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Analogamente, se *P* ≡ *A* o *P* ≡ *A′* il punto *C* non esiste, perciò **cosec α** si definisce per $\alpha \neq k\pi$.

LE FUNZIONI SECANTE E COSECANTE

Un altro modo di definire la secante e la cosecante:

Dato un angolo α, si chiama:

- secante di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\cos\alpha$, purché $\cos\alpha$ sia diverso da 0. Si indica con $\sec\alpha$:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

- cosecante di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\operatorname{sen}\alpha$, purché $\operatorname{sen}\alpha$ sia diverso da 0. Si indica con $\operatorname{cosec}\alpha$:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq 0 + k\pi.$$

Si osservi ora che il triangolo OPS è rettangolo in P e ha ipotenusa OS; applicando il primo teorema di Euclide, risulta:

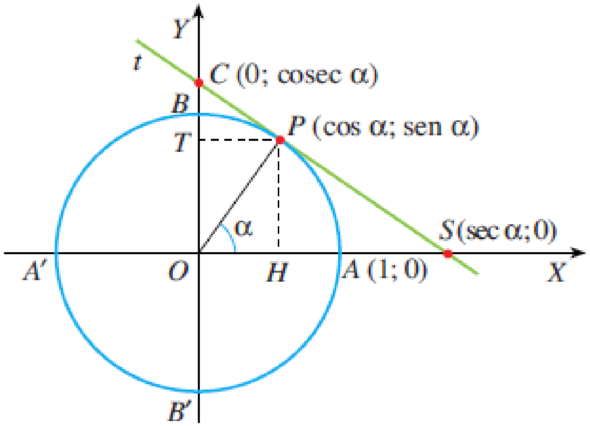
$$OS : OP = OP : OH$$

cioè:

$$\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$$

quindi, per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$



La funzione $y = \sec x$, è periodica di periodo 2π

LE FUNZIONI SECANTE E COSECANTE

Analogamente, applicando il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo OPC, si ha:

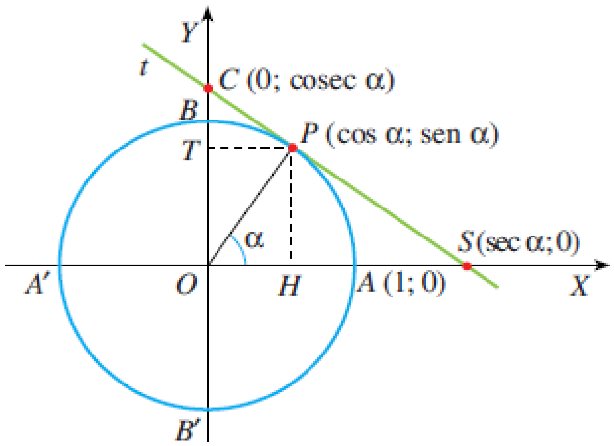
$$OC : OP = OP : OT$$

cioè:

$$\text{cosec } \alpha : 1 = 1 : \text{sen } \alpha$$

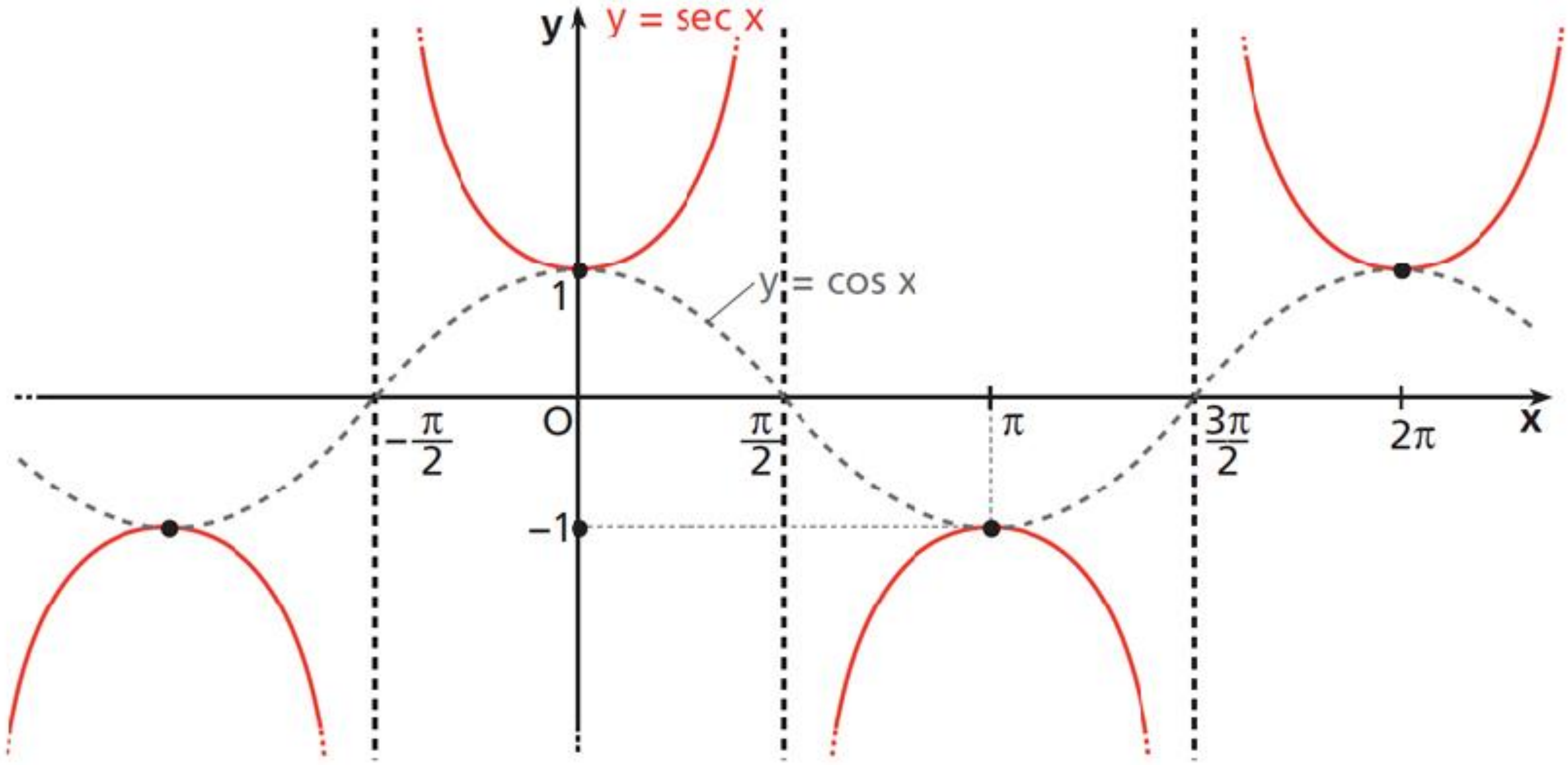
da cui, per $\alpha \neq k\pi$:

$$\boxed{\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}}$$

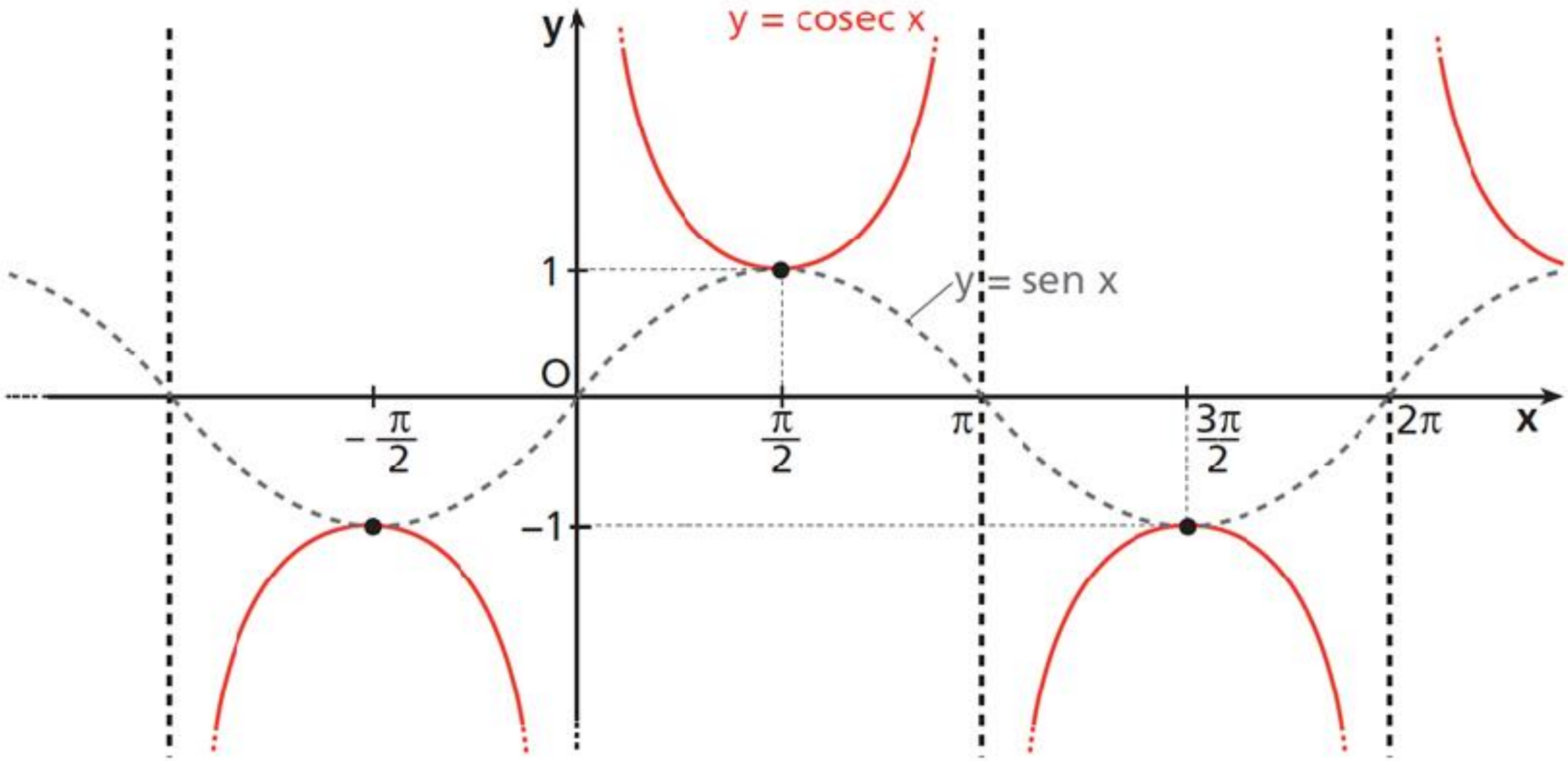


La funzione $y = \text{cosec } x$, è periodica di periodo 2π

IL GRAFICO DELLA FUNZIONE SECANTE



IL GRAFICO DELLA FUNZIONE COSECANTE



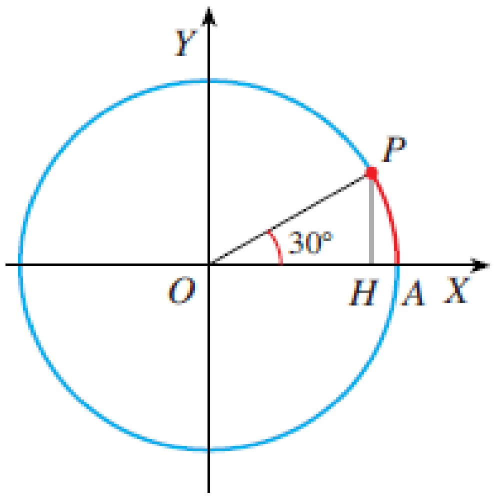
▶ $\alpha = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236\ldots \qquad (30°)$

Dalla figura 1.9 si osserva che il triangolo OHP, rettangolo in H e con l'angolo $H\hat{O}P$ di 30°, è la metà di un triangolo equilatero di lato OP e altezza OH e pertanto risulta:

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \overline{PH} = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{sen}\, 30° = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



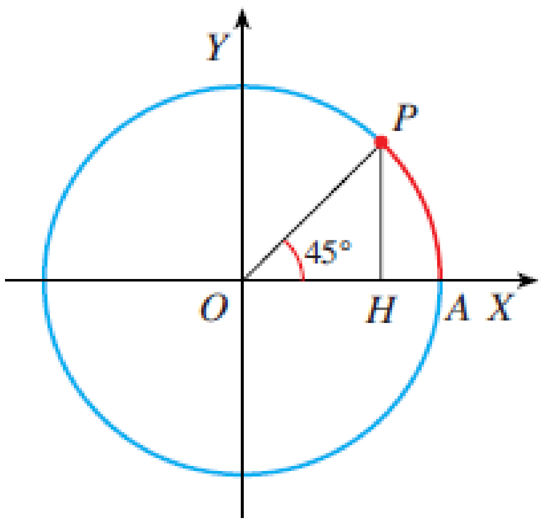
- $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854\ldots}$ **(45°)**

Dalla figura 1.10 si osserva che il triangolo *OHP*, rettangolo isoscele, è la metà di un quadrato di diagonale *OP* e lato *OH* = *PH* e pertanto risulta:

$$\overline{OH} = \overline{PH} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi:

$$\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

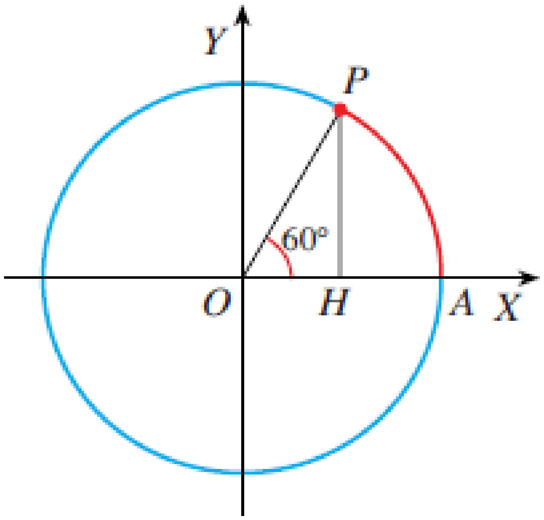


FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

- $\alpha = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472...$ (60°)

Dalla figura 1.11 si osserva che il triangolo rettangolo OHP, con l'angolo $H\hat{O}P$ di 60°, è la metà di un triangolo equilatero di lato OP e altezza PH e pertanto risulta:

$$\overline{OH} = \frac{1}{2} \qquad \overline{PH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Quindi:

$$\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

Riepilogo:

α	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

Tabella di valori

Trigonometria - Archi particolari

radianti	gradi	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
0	0°	0	1	0	Non esiste	1	Non esiste
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}+1$
$\frac{\pi}{8}$	$22^\circ 30'$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$\frac{\pi}{5}$	36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}-1$	$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3}{10}\pi$	54°	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5}-1$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$\frac{3}{8}\pi$	$67^\circ 30'$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$
$\frac{2}{5}\pi$	72°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5}+1$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$
$\frac{5}{12}\pi$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Non esiste	0	Non esiste	1
π	180°	0	-1	0	Non esiste	-1	Non esiste