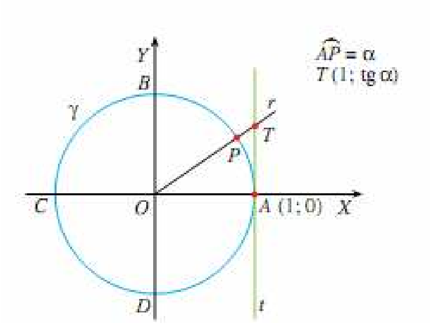
LA FUNZIONE TANGENTE

Siano dati un punto P appartenente alla circonferenza e un numero reale $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ in modo tale $\widehat{AP} = \alpha$ che sia e sia *t* la retta tangente in A (1; 0) alla circonferenza.

Def. **Si chiama *tangente* di α oppure dell'angolo $A\hat{O}P$ l'ordinata del punto T d' intersezione tra la retta *r*, passante per O e per P, e la retta *t*.**

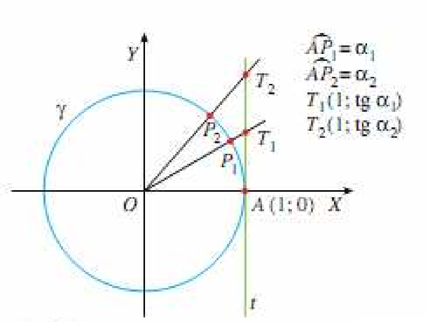
La tangente dell'angolo α si indica con la scrittura $tg\alpha$.



È evidente che la retta *r* passante per O e per P interseca *t* se e solo se non è parallela all'asse delle ordinate, il che avviene se P coincide con il punto B oppure con il punto D, cioè se risulta $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oppure $\alpha = \frac{3}{2}\pi$.

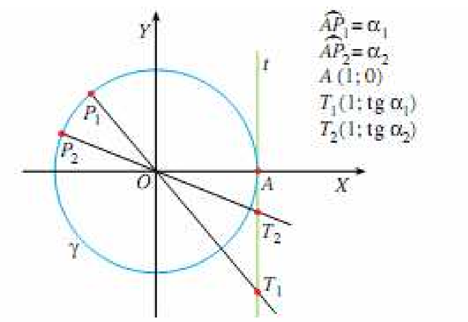
Se α varia tra 0 e 2π, i corrispondenti valori della tangente diventano:

- $\alpha = 0 \Rightarrow \text{tg } 0 = 0$ poiché $T \equiv A$.
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{tg } \alpha > 0$



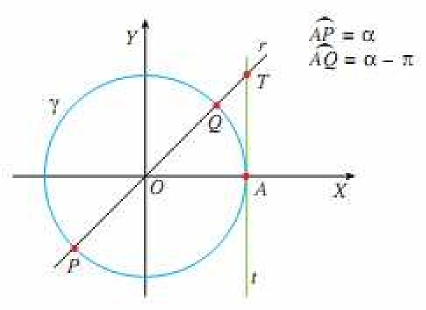
Comportamento della tangente
Poiché T appartiene al 1° quadrante, al crescere di α da 0 a $\frac{\pi}{2}$, la tg α assume valori positivi via via crescenti.

- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \text{tg } \alpha < 0$



Comportamento della tangente
Poiché T appartiene al 4° quadrante; al crescere di α da $\frac{\pi}{2}$ a π, la tg α cresce passando da valori negativi molto grandi in valore assoluto a valori via via più vicini a zero.

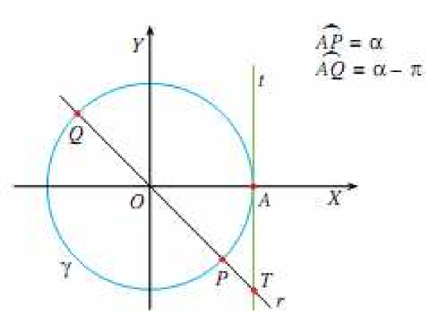
- $\alpha = \pi \Rightarrow \text{tg}\, \pi = 0$ poiché $T \equiv A$.
- $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \text{tg}\, \alpha > 0$



<u>Comportamento della tangente</u>
Poiché T appartiene al 1° quadrante, la tg α assume gli stessi valori positivi assunti per $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; infatti risulta:

$$\text{tg}\,(\alpha - \pi) = \text{tg}\, \alpha$$

- $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \Rightarrow \text{tg}\, \alpha < 0$



<u>Comportamento della tangente</u>
Poiché T appartiene al 4° quadrante, la tg α assume gli stessi valori negativi assunti per $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$; infatti risulta

$$\text{tg}\,(\alpha - \pi) = \text{tg}\, \alpha$$

- $\alpha = 2\pi \Rightarrow \text{tg}\, 2\pi = 0$ poiché $T \equiv A$.

Periodicità della funzione tangente

Poiché la tangente non è definita in $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, essa non sarà analogamente definita sui valori che si possono ottenere da questi aggiungendo multipli di 2π, cioè per tutti i valori:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi \qquad \alpha = \frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{2} + 3\pi \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} + 4\pi \qquad \alpha = \frac{3}{2}\pi + 4\pi = \frac{\pi}{2} + 5\pi$$

In definitiva <u>la tangente non è definita</u> per:

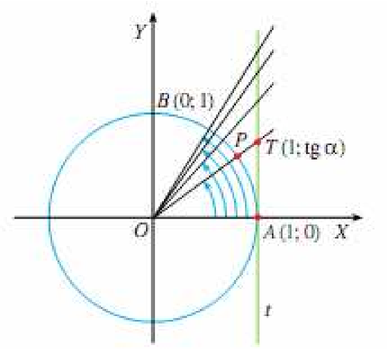
$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

L'esame dei valori assunti dalla tangente per particolari valori di α, mette in evidenza che i valori di tg α per $\alpha \in [0; \pi]$ sono gli stessi assunti per $\alpha \in [0; 2\pi]$, cioè si ha:

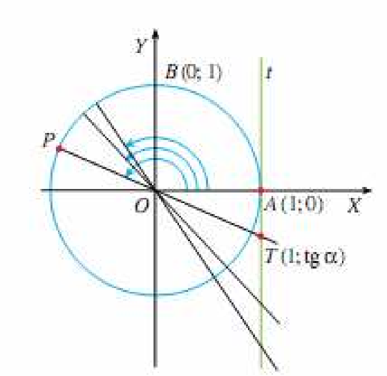
$$\boxed{\text{tg}\, \alpha = \text{tg}\,(\alpha + k\pi)} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

cioè ***la funzione tangente è periodica di periodo*** π.

Comportamento della funzione tangente per angoli prossimi a un angolo retto



Se il punto P si avvicina al punto B, mantenendosi nel 1° quadrante cioè se $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, il punto T assume una ordinata (tg α) positiva sempre più grande ⇒ la tg α tende a $+\infty$



Se il punto P si avvicina al punto B mantenendosi nel 2° quadrante, cioè se $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, il punto T assume una ordinata (tg α) negativa sempre più grande in valore assoluto ⇒ la tg α tende a $-\infty$

Poiché la tangente è periodica di periodo π, si ha un comportamento analogo in corrispondenza di tutti gli altri archi di misura $\frac{\pi}{2} + k\pi$

Grafico della tangente