Relazioni tra le funzioni goniometriche di angoli associati

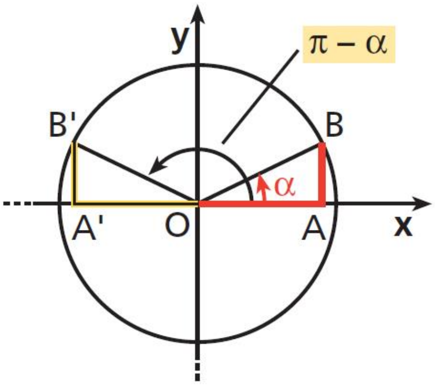
Def. Si chiamano **angoli associati** all'angolo α quegli angoli (diversi da α) per i quali le funzioni goniometriche, in valore assoluto, sono uguali a quelle dell'angolo α.

Il **segno** del valore della funzione viene poi definito valutando il **quadrante** di appartenenza degli angoli associati.

Gli angoli associati sono:

1. **Angoli supplementari** (α e π-α)

Def. Si chiamano *supplementari* due angoli la cui somma è un angolo piatto.



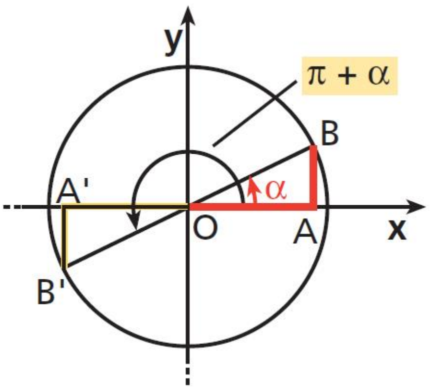
Dalla congruenza dei triangoli rettangoli ABO e A'B'O (*hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto* α) si ha:

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{cotg}(\pi-\alpha)=\frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=-\operatorname{cotg}\alpha$$

2. **Angoli che differiscono di un angolo piatto** (α e π+α)

Def. Si chiamano *angoli che differiscono di un angolo piatto* due angoli la cui differenza è un angolo piatto.



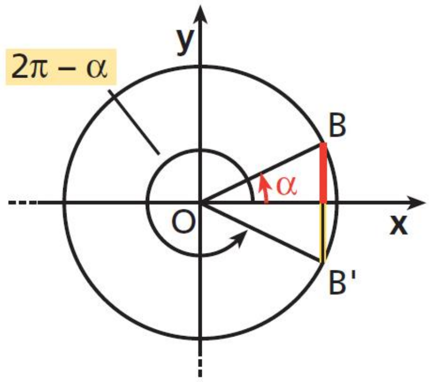
Dalla congruenza dei triangoli rettangoli ABO e A'B'O (*hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto* α) si ha:

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{cotg}(\pi+\alpha)=\frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{cotg}\alpha$$

3. **Angoli esplementari** (α e $\pi+\alpha$)

Def. Si chiamano *esplementari* due angoli la cui somma è un angolo giro.



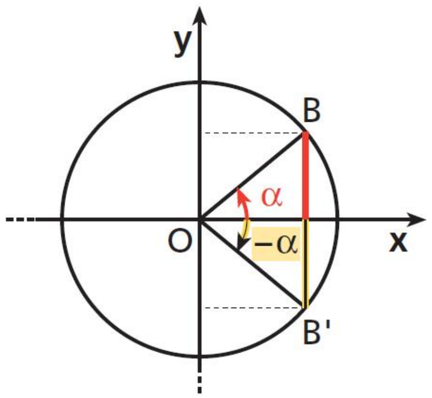
Dalla congruenza dei triangoli rettangoli ABO e A'B'O (*hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto* α) si ha:

$$\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \qquad \text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \qquad \text{cotg}(2\pi - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$$

4. **Angoli opposti** (α e $-\alpha$)

Def. Dato l'angolo α (misurato in senso antiorario), diremo *opposto* l'angolo α con la stessa ampiezza, ma misurato in senso orario.



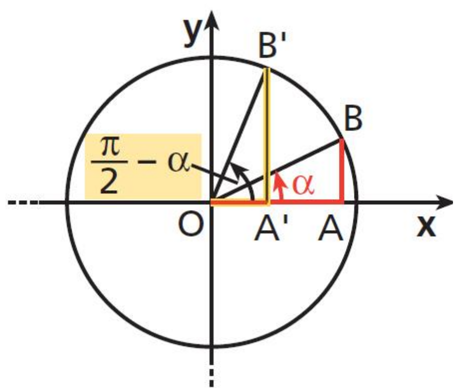
Dalla congruenza dei triangoli rettangoli ABO e A'B'O (*hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto* α) si ha:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \qquad \text{tg}(-\alpha) = \frac{-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{cotg}(-\alpha) = \frac{\cos\alpha}{-\text{sen}\,\alpha} = -\text{cotg}\,\alpha$$

5. **Angoli complementari** (α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

Def. Si chiamano *complementari* due angoli la cui somma è un angolo retto.



Nel triangolo A'B'O risulta $A'\hat{O}B' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $A'\widehat{B'}O = \alpha$ perché complementare del precedente.

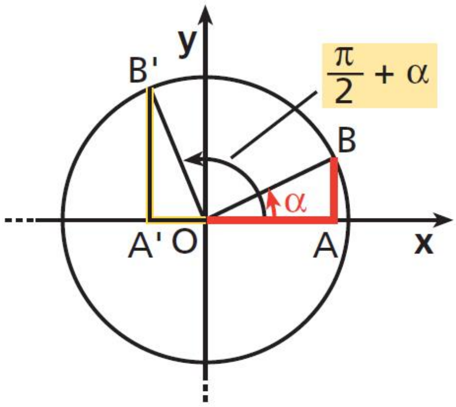
Dalla congruenza dei triangoli rettangoli ABO e A'B'O (*hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto* α) si ha:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cotg}\,\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha \qquad \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$$

6. Angoli che differiscono di un angolo retto (α e $\frac{\pi}{2}+\alpha$)

Def. Si chiamano *angoli che differiscono di un angolo retto* due angoli la cui differenza è un angolo retto.



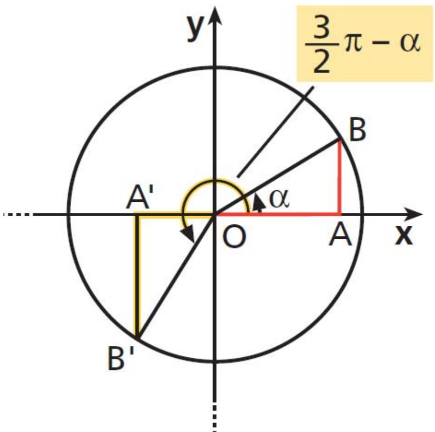
Nel triangolo A'B'O risulta $A'\hat{O}B' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $A'\hat{B'}O = \alpha$ perché complementare del precedente.

Dalla congruenza dei triangoli rettangoli ABO e A'B'O (*hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto* α) si ha:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

7. Angoli la cui somma è $\frac{3}{2}\pi$ (α e $\frac{3}{2}\pi-\alpha$)



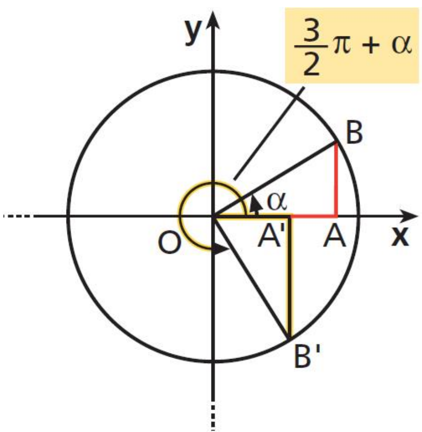
Nel triangolo A'B'O risulta $A'\hat{O}B' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $A'\hat{B'}O = \alpha$ perché complementare del precedente.

Dalla congruenza dei triangoli rettangoli ABO e A'B'O (*hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto* α) si ha:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

8. Angoli che differiscono di $\frac{3}{2}\pi$ (α e $\frac{3}{2}\pi+\alpha$)



Nel triangolo A'B'O risulta $A'\hat{O}B' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $A'\hat{B'}O = \alpha$ perché complementare del precedente.

Dalla congruenza dei triangoli rettangoli ABO e A'B'O (*hanno congruenti l'ipotenusa e l'angolo acuto* α) si ha:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$