GEOMETRIA PIANA

CENNI STORICI

Le origini della geometria sono antichissime e, per lo più, legate a necessità pratiche. Le tavolette e i papiri egiziani, risalenti al 2000 a.C., mettono in evidenza che gli antichi Egizi avevano conoscenze geometriche, anche se queste sembrano aver avuto il solo scopo di servire come pratico strumento per misurare e per costruire.
Nell'antica Grecia si pensava che la geometria fosse nata in Egitto: per esempio, Erodoto, storico greco del V secolo a.C., sosteneva che le inondazioni periodiche del Nilo costringevano gli Egiziani a spostare frequentemente i confini delle proprie terre e quindi a misurarle.
Anche i Babilonesi, che possedevano notevoli conoscenze matematiche, utilizzavano la geometria a fini pratici, per progettare, per esempio, opere di bonifica delle terre rese paludose e malsane dai meandri dei fiumi.
Ma la geometria come vera scienza nasce quando l'interesse per la matematica non è più solo essenzialmente utilitaristico, ma risponde al desiderio di pura conoscenza, proprio del pensiero greco già nell'ultimo millennio avanti Cristo.
Talete di Mileto, vissuto a cavallo tra il VII e il VI secolo a.C., portò in Grecia le molte conoscenze geometriche degli Egiziani e dei Babilonesi, avendo avuto la possibilità di recarsi in quei luoghi che erano allora i centri del sapere, e contribuì allo sviluppo dello studio della geometria intesa come ricerca di leggi generali e di giustificazioni di tutto ciò che veniva affermato.
Per circa tre secoli lo studio della geometria progredì, in Grecia, notevolmente per, opera, in specie, di uomini di grande intelligenza quali Pitagora, Anassagora, Ippocrate, Zenone, Democrito, Platone. All'apice di questo periodo si può collocare Euclide (III secolo a.C.), che, con i suoi "Elementi", analizzò e, nel contempo, sintetizzò l'opera dei suoi predecessori rispettando la tradizione precedente.
Anche i matematici greci Archimede ed Apollonio, di poco successivi, ebbero un'importanza notevole nell'ampliamento della geometria. Ma, tenendo soprattutto presente che l'opera di Euclide costituì punto di partenza essenziale per l'insegnamen*to elementare* della geometria nel corso dei vari secoli, viene chiamato **geometria euclidea,** ciò di cui tratteremo nei prossimi capitoli.
Poco si conosce della biografia di Euclide se non che fu chiamato ad insegnare la matematica presso l'accademia di Alessandria istituita da Re Tolomeo I, che successe ad Alessandro Magno nel governo dell'Egitto alla sua morte.
Su di lui sono noti due aneddoti che possono servire per capire la personalità del matematico.
Nel primo aneddoto si racconta che il re Tolomeo chiese a Euclide se non vi fosse un mezzo più breve e meno faticoso degli "Elementi" per comprendere la geometria e che Euclide gli rispose che *non esistono vie regie* in geometria.
Nel secondo, si narra che un discepolo, dopo aver imparato taluni dei primi teoremi, chiese a Euclide quale utile avrebbe ricavato imparando quelle cose. Ed Euclide chiamò allora un servo e gli diede ordine di dare qualche moneta al malcapitato discepolo apostrofandolo: *"Egli studia per trarne Profitto"*. (Si ricordi, per capire questo gesto, che con Euclide siamo nel periodo in cui la matematica per i Greci era uno strumento di conoscenza e che solo con Archimede, poco dopo, si apprezzò anche l'applicabilità della matematica alla pratica).

CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

➢ DIMOSTRAZIONI E TEOREMI

Un ragionamento corretto mediante il quale si ricava da un insieme di premesse una conclusione è detto ***dimostrazione***.
La proposizione dimostrata è detta ***teorema***.
L'enunciato di un teorema può essere espresso sotto forma di un'implicazione logica A implica B (leggi: " A è condizione sufficiente per B ") dove A è detta ipotesi e B è detta tesi.
Per esempio il teorema: "In un triangolo isoscele gli angoli alla base hanno uguale ampiezza." può essere enunciato nella forma:
"Condizione sufficiente affinché un triangolo abbia uguali le ampiezze degli angoli alla base è che il triangolo sia isoscele " ovvero, in simboli, A=>B, dove A: "Il triangolo è isoscele" e B:" Il triangolo ha le ampiezze degli angoli alla base uguali". Evidenziamo i concetti più significativi fin qui introdotti:

- **Una dimostrazione è un ragionamento corretto.**
- **Un teorema è una proposizione ricavata con una dimostrazione.**
- **Un teorema può essere posto nella forma A=>B in cui A è detta ipotesi e B tesi.**

➢ DEFINIZIONI

Una ***definizione*** è una proposizione mediante la quale si attribuisce in significato a un termine ricorrendo a concetti già noti.
Per esempio la proposizione "Un rombo è un quadrilatero che ha i quattro lati di uguale lunghezza", è una possibile definizione di rombo, ma risulta comprensibile solo se si possiedono già i concetti di quadrilatero, essere uguale, lato, lunghezza. In tal caso il termine rombo viene definito ricorrendo a nozioni già possedute.
Tuttavia non è possibile definire tutti i concetti che compaiono in una determinata disciplina.
Per esempio lo Zingarelli del 1971 riporta, fra le altre, le seguenti definizioni dei termini "cosa" e "oggetto":
COSA: oggetto che non si sa o non si vuole descrivere o nominare,
OGGETTO: ogni cosa che può essere percepita dai sensi.
Il circolo vizioso è evidente: cosa viene spiegato nel termini di oggetto e "oggetto" viene spiegato nei termini di cosa.
Nella lingua naturale ciò non comporta problemi insolvibili: gli esseri umani possono utilizzare le esperienze dei sensi e quindi è sufficiente portare molti esempi di "cosa" o di "oggetto" per farne comprendere il significato.

➢ CONCETTI PRIMITIVI

I ***concetti primitivi*** non si definiscono e costituiscono la base per la definizione di tutti gli altri concetti.
La scelta dei concetti primitivi è convenzionale: nella geometria piana sono concetti primitivi il punto, la retta, il piano; nella teoria degli insiemi sono, invece, concetti primitivi l'insieme, l'elemento, l'appartenenza.

➢ ASSIOMI

Gli ***assiomi*** sono delle proposizioni poste a fondamento della teoria e sono accettate senza bisogno di dimostrazione.
Gli assiomi o postulati costituiscono quindi le ipotesi della teoria.
Una teoria è un insieme ordinato di proposizioni; gli assiomi sono le proposizioni poste a fondamento della teoria e, a partire da essi, è possibile ricavare altre proposizioni (dette **teoremi**) mediante **dimostrazioni**.

➢ SISTEMA ASSIOMATICO IPOTETICO DEDUTTIVO

Il ***sistema assiomatico*** deduttivo è una teoria in cui sono dati:

1. I **concetti primitivi**
2. Un **sistema di assiomi**
3. Le **regole per dedurre** nuove proposizioni a partire dagli assiomi o da proposizioni precedentemente dedotte.

➢ I CONCETTI PRIMITIVI DELLA GEOMETRIA DEL PIANO

I concetti primitivi su cui si fonda la geometria del piano sono :
1. Il punto
2. La retta
3. Il piano
4. Il movimento rigido.

Come già detto essi non possono essere definiti , ma è possibile tentare di suggerire un significato basato sui concetti di insieme, di elemento, di appartenenza .
A tale scopo consideriamo il piano come un insieme i cui elementi sono i punti e consideriamo le rette come particolari sottoinsiemi del piano.

POSTULATI O ASSIOMI DI APPARTENENZA

ASSIOMI

1. Due punti distinti A e B appartengono ad una e una sola retta r e a ogni retta appartengono almeno 2 punti distinti.

2. Se 2 punti di una retta appartengono ad un piano, allora la retta appartiene al piano.

3. Data una retta contenuta in un piano, esiste almeno un punto P appartenente al piano, ma non appartenente alla retta.

4. Ad un piano appartengono almeno 3 punti non allineati e, viceversa, 3 punti non allineati appartengono a uno e un solo piano.

5. Ad una retta appartengono infiniti punti.

6. In un piano sono contenute infinite rette.

7. Un punto appartiene ad infinite rette.

DEFINIZIONI

1. Si dicono **allineati** i punti che appartengono ad una stessa retta.

2. Due rette che hanno uno e un solo punto in comune si dicono **incident**i.

TEOREMI

1. Ad un piano appartengono infiniti punti.

GLI ASSIOMI DI ORDINAMENTO DELLA RETTA, LE SEMIRETTE E I SEGMENTI.

ASSIOMI

8. Ogni retta è un insieme totalmente ordinato di punti .
   L'ordinamento è tale che:
   - presi sulla retta 2 punti distinti B e C tali che C segue B, esistono sulla retta un punto A che precede B e un punto D che segue C;
   - presi sulla retta 2 punti M e P esiste un punto N della retta tale che N è preceduto da uno dei punti M, P ed è seguito dall'altro.

9. Su ogni retta del piano esistono 2 possibili relazioni d'ordine (totale).

DEFINIZIONI

3. Una retta in cui sia stato introdotto un ordinamento si dice **orientata**.

4. Dato un punto 0 su una retta r, si dice **semiretta** di origine 0 l'insieme unione del punto 0 e di quelli che precedono 0, oppure l'insieme unione del punto 0 e di quelli che seguono 0. I punti che seguono o precedono 0 si dicono punti interni della semiretta.

5. Dati due punti P e Q di una retta r, si dice **segmento** di estremi P e Q l'insieme che ha per elementi i punti P e Q e tutti i punti che seguono P e precedono Q nell'ordinamento fissato sulla retta.

6. Due **segmenti** si dicono **consecutivi** se e solo se hanno uno e un solo estremo in comune.

7. Due **segmenti** si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e se i loro estremi appartengono ad una medesima retta.

8. Tutti i punti di un segmento che seguono il primo estremo e precedono il secondo si **dicono punti interni del segmento**.

9. Dati due segmenti adiacenti di rispettivi estremi A, B e B, C, si dice **somma** dei due segmenti dati il segmento di estremi A, C. Tale segmento si indica indifferentemente con AB+BC o con AC. L'operazione, che dati i segmenti AB e BC restituisce il segmento somma AC, si dice addizione.

10. Si dice che un **segmento** AB è **differenza** di due segmenti adiacenti AC e BC se AC è la somma di AB e BC.

IL PIANO E I SUOI SOTTOINSIEMI

ASSIOMI

10. L'intersezione di 2 figure convesse è ancora una figura convessa.

11. Una retta r di un piano divide il piano in 3 sottoinsieme disgiunti: la retta e 2 semipiani opposti generati dalla retta.
    I due semipiani sono tali che un segmento di estremi A e B, con A appartenente al primo semipiano e B appartenente al secondo, ha uno ed un solo punto in comune con la retta.
    Se gli estremi del segmento appartengono entrambi ad uno o all'altro semipiano, allora il segmento non ha punti in comune con la retta.

12. Un angolo concavo contiene infinite rette; un angolo convesso (che non sia piatto) non contiene, invece, alcuna retta.

13. Una semiretta OC avente origine nel vertice 0 di un angolo AOB e passante per un punto C appartenente all'angolo AOB ha tutti i suoi punti appartenenti all'angolo A™B.

14. Data una retta *r* e un punto P non appartenente ad essa, le semirette che si ottengono congiungendo i punti appartenenti a r con P sono ordinate nello stesso modo dei punti di *r*.

DEFINIZIONI

11. Si dice **figura piana** un sottoinsieme di punti del piano.

12. Una **figura** si dice **convess*a***, comunque vengano presi 2 punti, se il segmento che li unisce è costituito da soli punti appartenenti alla figura stessa. Una **figur*a*** si dice **concava** se non è convessa.

13. Una **figura** del piano si dice **limitata** se e solo se la sua intersezione con una retta qualunque può essere contenuta in un segmento. Altrimenti si dice illimitata.

14. Si dice **semipiano** ciascuno dei 2 sottoinsiemi generati in un piano da una retta, tali che la loro unione dia il piano e la loro intersezione la retta. La retta si dice **origine** dei 2 semipiani che vengono detti anche semipiani **opposti** l'uno dell'altro.

15. Dette r e s due rette incidenti si dice **angolo convesso** la intersezione di uno dei due semipiani di origine r con dei due semipiani di origine s. Il punto di intersezione si dice vertice dell'angolo. Le due semirette uscenti dal vertice si dicono lati dell'angolo.

16. L'insieme che si ottiene dall'unione dell'insieme complementare di un angolo convesso di lati OA e OB con i lati stessi si dice **angolo concavo**.

17. Due **angoli** si dicono **consecutivi** se hanno il vertice e un lato in comune.

18. L'unione di due angoli consecutivi AOB e BOC si dice **angolo somma** e sarà AOC.

19. Se I' angolo AOC è la somma degli angoli consecutivi AOB e BOC, si dice che AOB è l'**angolo differenza** tra AOC e BOC.

20. Due **angoli** si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e hanno i lati non comuni allineati.

21. Si dice **angolo piatto** ciascuno dei due semipiani individuati due semirette OA e OB aventi la stessa origine e appartenenti alla medesima retta.

22. Se i due lati dell'angolo sono sovrapposti, allora l'**angolo** (convesso) si dice **nullo**.
    L'angolo concavo ad esso associato si dice **angolo giro**.

23. Due angoli (convessi) tali che i lati dell'uno siano i prolungamenti dei lati dell'altro si dicono **angoli opposti al vertice**.

24. Due **angoli** la cui somma è un angolo piatto si dicono **supplementari**.

25. Un segmento i cui estremi appartengono ai lati di un angolo e tale che sia contenuto nell'angolo si dice **corda** (dell'angolo).

26. Si dice **poligonale** l’unione di due o più segmenti consecutivi. I segmenti si dicono lati della poligonale e i loro estremi si dicono vertici. Se il primo e l'ultimo vertice della poligonale coincidono la poligonale si dice chiusa.

27. Si dice **poligono** la regione di piano delimitata da una poligonale chiusa.

28. Si dice **angolo interno** di un poligono l’angolo individuato da due lati consecutivi e dal vertice in comune.

29. A ogni angolo interno di un poligono sono associati due angoli a esso supplementari che hanno come vertice lo stesso vertice. Tali angoli sono detti **angoli esterni.**

30. Si dice **corda di un poligono** il segmento i cui estremi appartengono a due lati del poligono.

31. Si dice **diagonale** di un poligono la corda che congiunge due vertici non consecutivi del poligono.