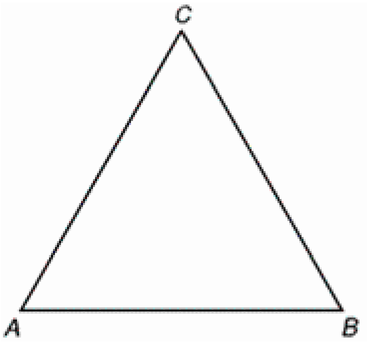
La funzione esponenziale

by Caterina Vespia

Dall' ***isola di Koch***, passando per la ***polvere di Cantor***, alla ***funzione esponenziale*** …

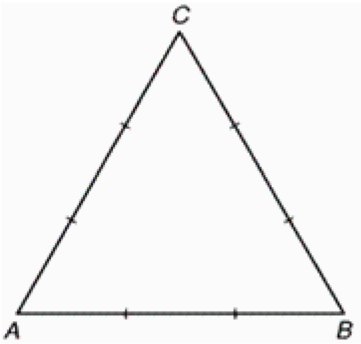
1. *La Curva di Koch ... la curva patologica.*

Dato un triangolo equilatero ABC di lato unitario,



esegui le seguenti operazioni:

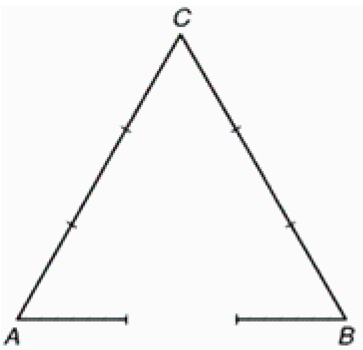
Primo step:



Suddividi ogni suo lato in 3 parti uguali

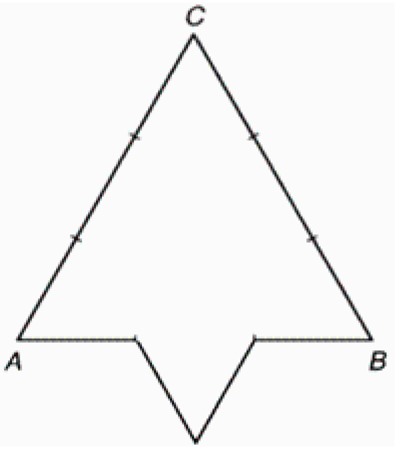
Secondo step:

Togli il segmento centrale dal lato AB



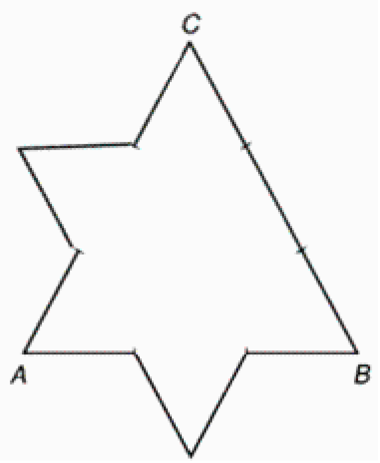
Terzo step:

Sostituiscilo con i 2 lati del triangolo equilatero che si può costruire su di esso



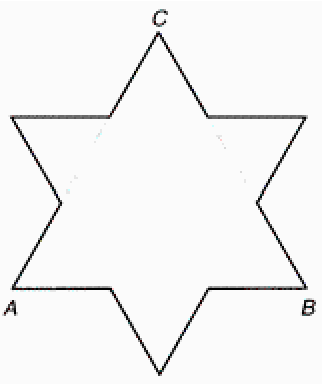
Quarto step:

Ripeti (passo2 e passo3) la costruzione per il lato AC

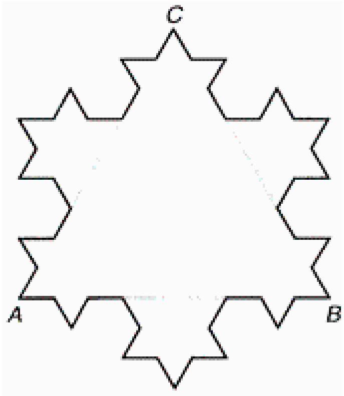


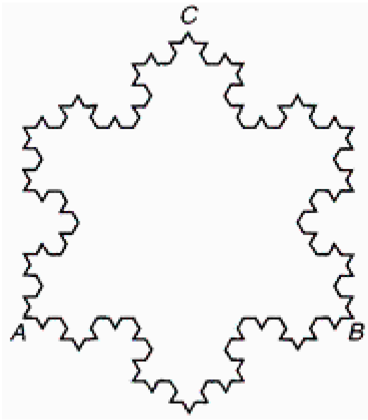
Quinto step:

Ripeti (passo2 e passo3) la costruzione per il lato CB



Se ripeti la procedura più volte otterrai una regione con contorno frastagliato.





Ripetendo la procedura all’infinito si ottiene una regione di piano detta ***Isola di Koch*** e la linea di contorno si chiama ***Curva di Koch***.

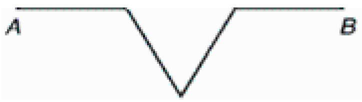
Quesito: ***Quanto è lunga la curva di Koch?***

Facciamo un po' di calcoli ...

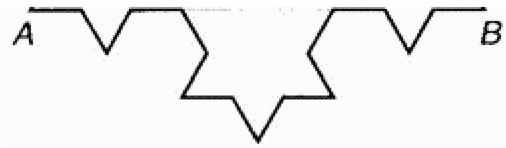
Misuriamo la linea AB.

Sappiamo che inizialmente AB è lunga 1.

Dopo la prima suddivisione e relativa costruzione (***terzo step***), è composta da 4 segmenti lunghi $\frac{1}{3}$ e quindi è lunga $\frac{4}{3}$



Dopo aver ripetuto la costruzione su ogni segmento che compone la linea AB, si ottiene una linea lunga $\left(\frac{4}{3}\right)^2$



Ripetendo la costruzione si ottiene una nuova linea che è i $\frac{4}{3}$ della precedente.

Si costruisce così la successione

$$1,\ \frac{4}{3},\ \left(\frac{4}{3}\right)^2,\ \left(\frac{4}{3}\right)^3,\ \left(\frac{4}{3}\right)^4,\ \ldots,\ \left(\frac{4}{3}\right)^n,\ \ldots$$

La linea dopo n ripetizioni avrà lunghezza $\frac{4^n}{3^n}$

Le lunghezze così ottenute costituiscono una ***progressione geometrica*** di ragione $\frac{4}{3}$ e primo termine 1.

Poiché, al tendere all'infinito di n, la linea AB tende a diventare infinita allora la ***successione*** è ***divergente***.

La linea di contorno è detta ***curva di Koch***. La sua lunghezza è 3 volte quella della linea che unisce A a B.

Infatti, inizialmente è 3, dopo una suddivisione è $3 \cdot \frac{4}{3}$, dopo due suddivisioni è $3 \cdot \frac{4^2}{3^2}$, dopo n suddivisioni è $3 \cdot \frac{4^n}{3^n}$ e al tendere di n all'infinito tende a diventare infinita.

La curva di Koch ha una particolarità: ***ha lunghezza infinita pur racchiudendo una regione di piano finita***.

E' una linea infinitamente spezzettata, ma nel rappresentarla, oltre un certo numero, non riusciamo più a cogliere le successive suddivisioni.

La curva, per questa sua caratteristica di 'spezzettamento', è detta ***curva patologica***.