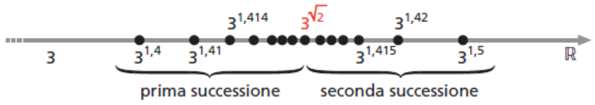
Proprietà delle potenze

Le potenze con esponente intero	
$a^0 = 1$ con $a \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$
$a^1 = a$	$6^1 = 6$
Se l'esponente è positivo e diverso da 1: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
Se l'esponente è negativo: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ con $a \neq 0, n > 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Le potenze con esponente razionale	
Se l'esponente è positivo: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $a \geq 0, n \in \mathbb{N} - \{0\}$	$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$
Se l'esponente è negativo: $a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ con $a > 0, \frac{m}{n} > 0$ con $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$	$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Le proprietà delle potenze	
I. Prodotto di potenze di uguale base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$10^2 \cdot 10^{-3} = 10^{-1}$
II. Quoziente di potenze di uguale base: $a^x : a^y = a^{x-y}$ con $a \neq 0$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^9$
III. Potenza di potenza: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(6^{-2})^{\frac{1}{2}} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$
IV. Prodotto di potenze di uguale esponente: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
V. Quoziente di potenze di uguale esponente: $a^x : b^x = (a : b)^x$ con $b \neq 0$	$\left(\frac{81}{5}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

Le potenze con esponente reale
La potenza a^x di un numero reale a, con 0 < a < 1 e con esponente reale x > 0, come quell'unico numero reale: • maggiore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per eccesso; • minore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto. 
Si definiscono: • $1^x = 1$ per qualunque reale x; • $0^x = 0$ per qualunque reale x positivo; • $a^0 = 1$ per qualunque reale a positivo; • se l'esponente è negativo: $a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$ per qualunque reale a positivo (con $r > 0$).
Non si definiscono invece: • le potenze con base zero ed esponente nullo o negativo (es. 0^0 non è definita); • le potenze con base un numero reale negativo (0^{-6} non è definita).
Le potenze a^x con base reale a > 0 sono le sole a essere definite con esponente x reale qualsiasi. Quindi, essendo la base a positiva, il valore della potenza è sempre positivo: $a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Proprietà delle potenze con esponente reale	
Anche per le potenze con esponente reale valgono le cinque proprietà delle potenze riassunte nella terza tabella.	$3^{\sqrt{5}} \cdot 3^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; $(6^{\sqrt{2}})^{\sqrt{5}} = 6^{\sqrt{10}}$.
Inoltre vale il seguente teorema: All'aumentare dell'esponente reale x, la potenza a^x: • aumenta se a > 1, cioè • diminuisce se 0 < a < 1, cioè: se $a > 1, x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$; se $0 < a < 1, x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.	