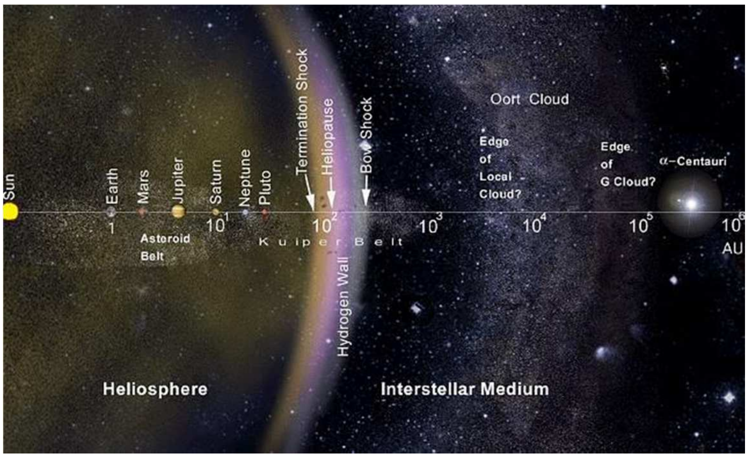
I logaritmi

by Caterina Vespia

"Poiché non vi è nulla di più ostico nell'applicazione matematica, né che reca maggiori difficoltà nei calcoli, che la moltiplicazione, la divisione, l'estrazione di radici quadrate e cubiche di numeri grandi ... ho cominciato a pensare come risolvere questi problemi."

John Napier, Mirifici logarithmorum canonis descriptio

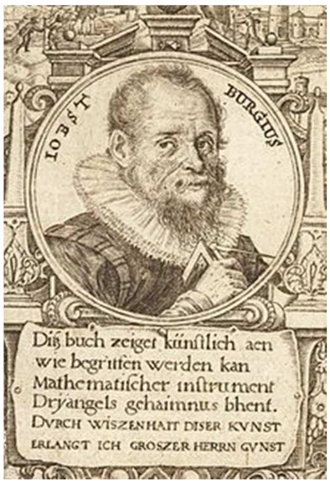


Cenni storici

La scoperta dei logaritmi (dal greco ***lògon*** [*ragione*, intesa nel senso usato nelle progressioni geometriche, cioè rapporto] e ***arithmòs*** [*numero*],"numero della ragione", "numero del rapporto") è avvenuta ad opera di due matematici vissuti a cavallo del XVII secolo: lo scozzese **G. Nepero** (1550-1617) e lo svizzero **Jost Bürgi** (1552-1632).

John Napier (1550-1617)

Henry Briggs (1561-1630)



Joost Bürgi (1552-1632)

In quel periodo si svilupparono in modo notevole le scienze quali l'astronomia, la trigonometria e l'aritmetica e ciò comportò la necessità di effettuare calcoli lunghissimi con numeri formati da numerose cifre. Scaturì così l'esigenza di trovare delle nuove tecniche di calcolo che li rendessero più rapidi ed agevoli e, per questo motivo, furono ideati i logaritmi.
Il metodo dei logaritmi fu presentato da Nepero nel 1614, in un libro intitolato ***Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio***.

Joost Bürgi invece li inventò indipendentemente qualche anno prima di Nepero, ma pubblicò i suoi risultati solo sei anni dopo Nepero nel 1620 in "***Arithimetische und Geometrice Progress Tabulen***".

Un matematico britannico, **Henry Briggs** (1561 –1630), venuto a conoscenza delle opere di Nepero, decise di costruire una tavola dei logaritmi a base dieci e nel 1624 scrisse "***Arithmetica logarithimica***",in cui riportò le tavole dei logaritmi decimali di 30.000 numeri naturali con 14 cifre decimali.

Arithmetica logarithimica

Solamente agli inizi del '700 con Eulero i logaritmi diventano oggetto matematico adottando un linguaggio ed una notazione simili a quelli usati oggi. Eulero fu il primo ad usare la lettera ***e*** per rappresentare la base del sistema dei logaritmi naturali o neperiani.

I logaritmi per semplificare i calcoli ...

I logaritmi permettevano di rendere meno difficoltosa l'esecuzione dei calcoli. Con i logaritmi era possibile trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti, quindi tutte le operazioni venivano molto semplificate.
Vediamo come ...
Consideriamo una corrispondenza biunivoca *f* tra due insiemi infiniti:

$A := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, `...`\}$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$$

$G := \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, `...`\}$

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$$

L'insieme A è l'insieme dei numeri naturali e possiamo considerarlo come una progressione aritmetica di primo termine 0 e ragione 1; l'insieme G, invece, è una progressione geometrica con primo termine 1 e ragione 2.
La corrispondenza *f*: A → G è così definita:

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
G	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

Possiamo notare che i numeri appartenenti ad A sono i logaritmi in base 2 dei numeri appartenenti a G.
Infatti:

> $\log_2(1)$; *è uguale a 0*

> $\log_2(2)$; *è uguale a 1*

> $\log_2(4)$; *è uguale a 2*

e così via ...

Quindi la funzione ***f*** è la ***funzione logaritmica*** in base 2 dei numeri dell'insieme G:

$f := x \to \log[2](x)$

$$x \to \log_2(x)$$

Vediamo come si può trasformare ***un prodotto in una somma***:
Prendiamo due numeri qualsiasi appartenenti a G, ad es. **8** e **32**il cui prodotto è **256** e osserviamo i numeri corrispondenti che si trovano nella prima riga della tabella

A	0	1	2	**3**	4	**5**	6	7	8	...
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
G	1	2	4	**8**	16	**32**	64	128	256	...

e sommiamoli

$$3 + 5 = 8$$

infine prendiamo in G il numero corrispondente, cioè **256**

A	0	1	2	**3**	4	**5**	6	7	**8**	...
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↓	
G	1	2	4	**8**	16	**32**	64	128	**256**	...

Quindi è possibile calcolare il prodotto di due numeri eseguendo un'addizione tra i logaritmi dei due numeri.
Procedendo in modo analogo, si potrebbe determinare il quoziente tra due numeri attraverso la sottrazione tra i logaritmi dei due numeri, trasformare elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti.

I logaritmi come operazione inversa dell'elevamento a potenza

L'insieme G potrebbe essere considerato come l'insieme delle potenze di 2 con esponente $n \in \mathbb{Z}^+$, cioè:

$$G := \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, \ldots\}$$

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$$

La tabella diventerebbe:

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
G	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	...

Quindi si può concludere che il $\log_2(x)$ con $x \in G$ è l'esponente al quale bisogna elevare la base 2 per avere il numero *x*.

La definizione di logaritmo

Consideriamo l'equazione esponenziale $2^x = 8$ la cui soluzione è: x=3 è l'esponente che, assegnato alla base a=2, dà come risultato 8. Per tale motivo si dice che 3 è il logaritmo in base 2 del numero 8 e si scrive:

$$log_2(8) = 3$$

In generale:
Si dice logaritmo in base a (positiva e diversa da 1) di un numero b (reale e positivo) l'esponente x che si deve dare ad a per avere b:

$$x = log_a\ b$$

dove ***a*** *è detta* ***base*** *del logaritmo e* ***b*** *è detto* ***argomento****.*

Nota

In particolare:
a) per a=10 si ha il sistema dei ***logaritmi decimali*** (*volgari* o *di Briggs*);
b) per a = ***e***≅ 2,71828 si ha il sistema dei ***logaritmi naturali*** o *neperiani;*
c) per b = 0 $\Rightarrow \nexists\ log_a$ b;
d) per b negativo $\Rightarrow \nexists\ log_a$ b.

In simboli:

$$log_a\, b = x \iff a^x = b \quad con \quad b \in \mathbb{R}_0^+ \; e \; a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$$