La funzione esponenziale

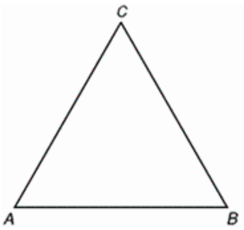
Dall' ***isola di Koch***, passando per la ***polvere di Cantor*** e per la ***colonia di batteri***,

alla ***funzione esponenziale*** …

1. *La Curva di Koch … la curva patologica.*

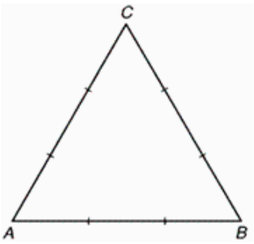
Costruiamola …

Dato un triangolo equilatero ABC di lato unitario



eseguiamo le seguenti operazioni:

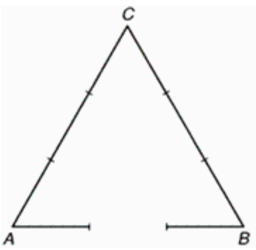
Primo step:



Suddividiamo ogni suo lato in 3 parti uguali

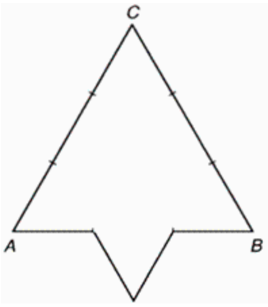
Secondo step:

Togliamo il segmento centrale dal lato AB



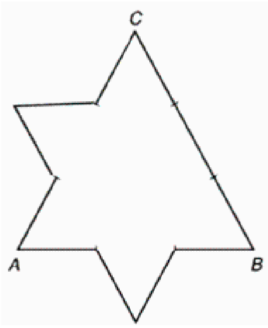
Terzo step:

Sostituiamolo con i 2 lati del triangolo equilatero che si può costruire su di esso



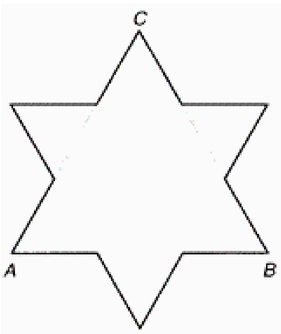
Quarto step:

Ripetiamo (passo2 e passo3) la costruzione per il lato AC

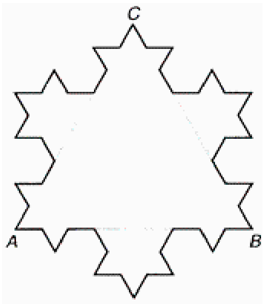


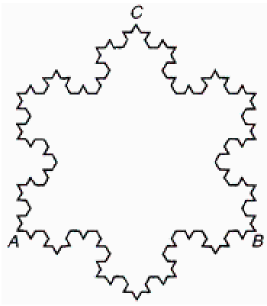
Quinto step:

Ripetiamo (passo2 e passo3) la costruzione per il lato CB



Se ripetiamo la procedura più volte otterremo una regione con contorno frastagliato.





Ripetendo la procedura all'infinito si ottiene una regione di piano detta ***Isola di Koch*** e la linea di contorno si chiama ***Curva di Koch***.

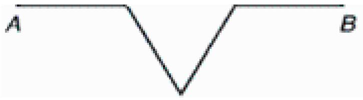
Quesito: ***Quanto è lunga la curva di Koch?***

Facciamo un po' di calcoli ...

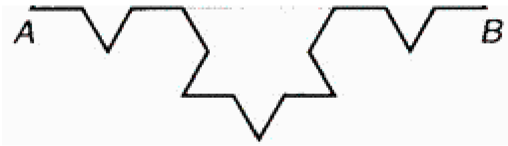
- Misuriamo la linea AB.

Sappiamo che inizialmente AB è lunga 1.

Dopo la prima suddivisione e relativa costruzione (***terzo step***), è composta da 4 segmenti lunghi $\frac{1}{3}$ e quindi è lunga $\frac{4}{3}$



Dopo aver ripetuto la costruzione su ogni segmento che compone la linea AB, si ottiene una linea lunga $\left(\frac{4}{3}\right)^2$



Ripetendo la costruzione si ottiene una nuova linea che è i $\frac{4}{3}$ della precedente.

Si costruisce così la successione

$$1,\ \frac{4}{3},\ \left(\frac{4}{3}\right)^2,\ \left(\frac{4}{3}\right)^3,\ \left(\frac{4}{3}\right)^4,\ \ldots,\ \left(\frac{4}{3}\right)^n,\ \ldots$$

La linea dopo n ripetizioni avrà lunghezza $\frac{4^n}{3^n}$

Le lunghezze così ottenute costituiscono una ***progressione geometrica*** di ragione $\frac{4}{3}$ e primo termine 1.

Poiché, al tendere all'infinito di n, la linea AB tende a diventare infinita allora la ***successione*** è ***divergente***.

La linea di contorno è detta ***curva di Koch***. La sua lunghezza è 3 volte quella della linea che unisce A a B.

Infatti, inizialmente è 3, dopo una suddivisione è $3 \cdot \frac{4}{3}$, dopo due suddivisioni è $3 \cdot \frac{4^2}{3^2}$, dopo n suddivisioni è $3 \cdot \frac{4^n}{3^n}$ e al tendere di n all'infinito tende a diventare infinita.

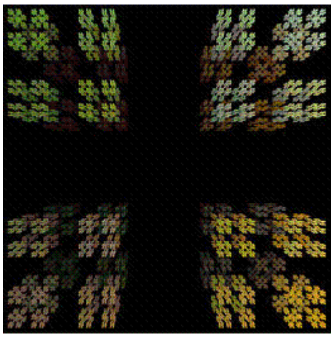
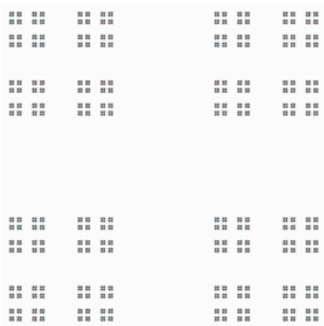
La curva di Koch ha una particolarità: ***ha lunghezza infinita pur racchiudendo una regione di piano finita***.

E' una linea infinitamente spezzettata, ma nel rappresentarla, oltre un certo numero, non riusciamo più a cogliere le successive suddivisioni.

La curva, per questa sua caratteristica di 'spezzettamento', è detta ***curva patologica***.

2. *La polvere di Cantor*

Costruzione geometrica introdotta da Georg Cantor (1845-1918)

Georg Cantor descrisse il seguente procedimento:

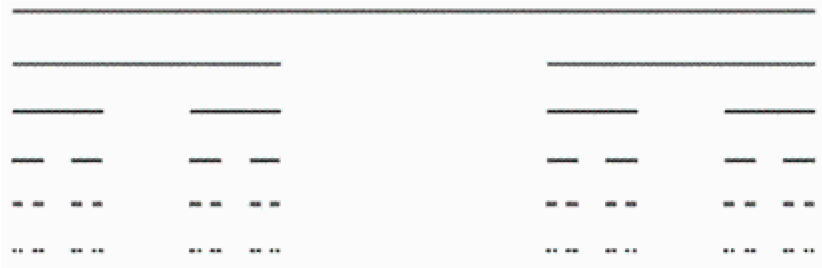
"Dato un segmento, lo si divida in tre parti uguali e si asporti la parte centrale. Rimangono due segmenti: ad ognuno di essi si applichi lo stesso procedimento all'infinito."

Costruiamo insieme la ***polvere di Cantor*** ....

1° step: Prendiamo un segmento AB di lunghezza unitaria, dividiamolo in tre parti uguali e togliamo il tratto centrale. Otteniamo così due segmenti:

2° step: Ripetiamo la stessa operazione sui due segmenti ottenuti.

3°-5° step: Iterando il procedimento, dopo 5 divisioni l'insieme di Cantor risulta essere così costruito:



Abbiamo ottenuto un insieme di "segmentini" in numero sempre maggiore ma di lunghezza via via minore.

Se ripetessimo la procedura infinite volte otterremmo un insieme geometrico detto ***polvere di Cantor***.

Quesito: ***Qual è la lunghezza della polvere di Cantor?***

Facciamo un po' di calcoli ...

Vogliamo calcolare la sua lunghezza, che è la somma delle lunghezze dei segmentini che la compongono.

Inizialmente il segmento è lungo 1.

Dopo ogni operazione otteniamo dei segmenti la cui lunghezza complessiva è $\frac{2}{3}$ di quella precedente.

Le successive lunghezze formano una progressione geometrica di primo termine 1 e di ragione $\frac{2}{3}$:

$$1, \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \dots$$

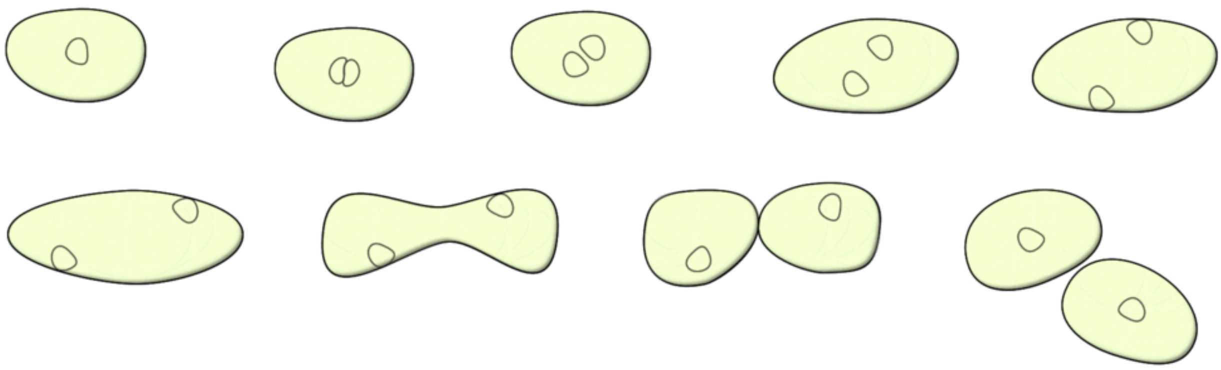
Dopo n ripetizioni, la lunghezza è $\frac{2^n}{3^n}$

Poiché la ragione $\frac{2}{3}$ è positiva e minore di 1, la progressione converge a 0.

La lunghezza della *polvere di Cantor* è quindi ***nulla***, nonostante la figura sia costituita di piccolissimi segmenti che è sempre possibile suddividere nuovamente.

3. ***La colonia di batteri***

Se osserviamo il replicarsi di una colonia di batteri scopriamo che si riproducono per *fissione binaria* che è una forma di riproduzione asessuata.



Immagini tratte da Wikipedia.

Il numero dei batteri aumenta secondo le potenze di 2.

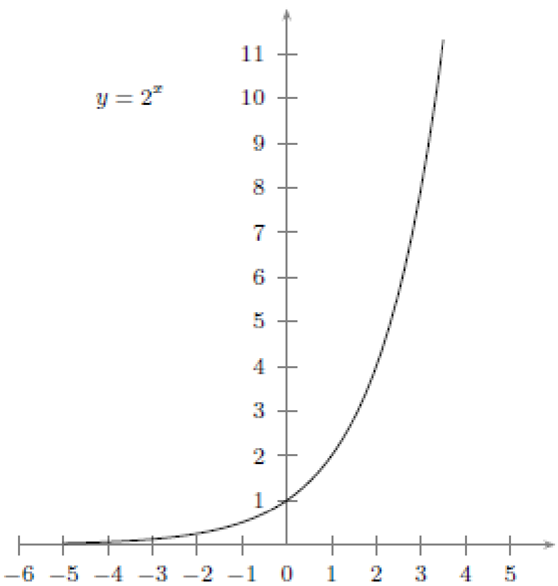
Infatti se consideriamo una determinata specie di batterio che si divide, per esempio, ogni giorno e partiamo dal ***giorno zero*** noteremo un certo numero di batteri (ad esempio un milione), alla fine del ***giorno 1*** sono diventati il doppio (due milioni), alla fine del ***giorno 2*** sono diventati il quadruplo (quattro milioni) e così via.

Quindi, ogni giorno, la popolazione batterica raddoppia di numero.

Il ***numero*** di batteri in ***fase di crescita esponenziale*** sarà dato da $\mathbf{2^x}$, dove *x* indica il numero di giorni.

La relazione che descrive questo tipo di crescita esponenziale è $f: x \longrightarrow 2^x$

Rappresentando graficamente si ottiene:



La curva disegnata è la curva esponenziale $\mathbf{y = 2^x}$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

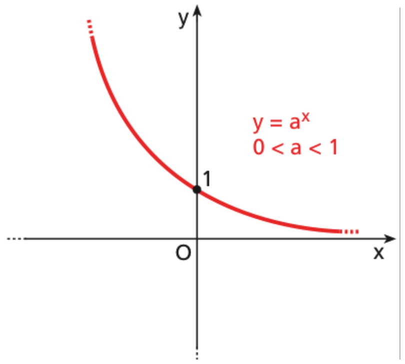
In generale:

Fissato un numero reale *a* > 0, si definisce ***funzione esponenziale*** di base *a*>0 la funzione ***y=exp_a(x)*** che ad ogni $x \in \mathcal{R}$ associa il numero reale positivo a^x.

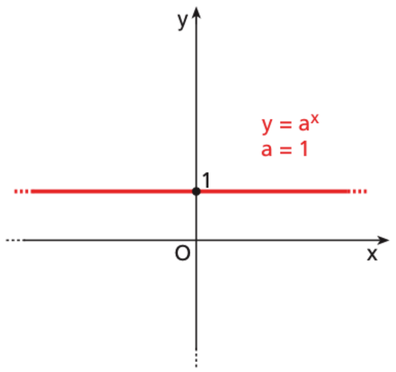
$$exp_a: x \longrightarrow y = a^x$$

La funzione esponenziale ha per dominio l'insieme $\mathcal{R}$ e per codominio l'insieme $\mathcal{R}^+$.

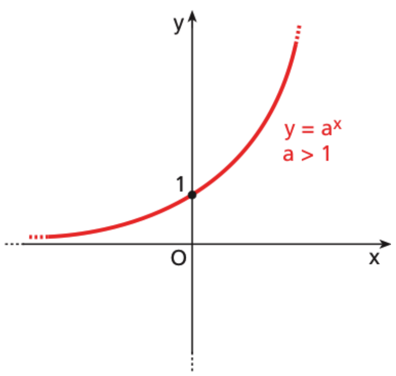
Il grafico
Esaminiamo quali valori possiamo attribuire al numero reale positivo a:



← Se $0 < a < 1$ la funzione è decrescente in $\mathcal{R}$, il codominio è $\mathcal{R}^+$.



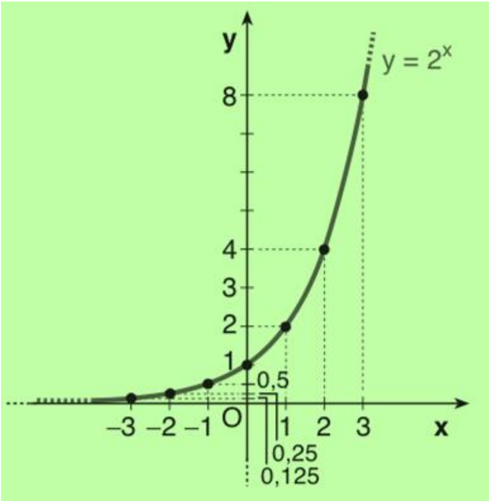
← Se $a = 1$ la funzione è una retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto (0;1), il codominio è $\{1\}$.



← Se $a > 1$ la funzione è crescente in $\mathcal{R}$, il codominio è $\mathcal{R}^+$.

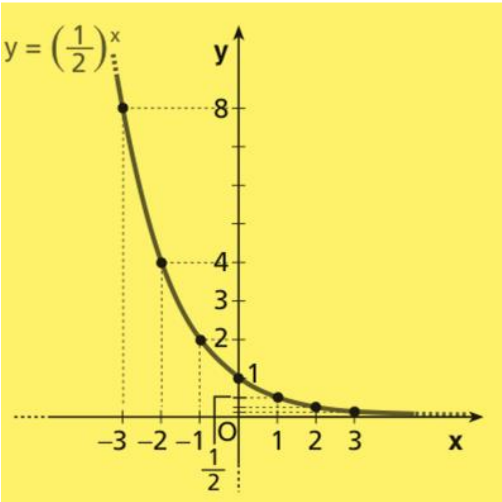
Esempi

1°) $a > 1$



x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

2°) $0 < a < 1$



x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$