EQUAZIONI ESPONENZIALI

DEFINIZIONE

*Si dicono **equazioni esponenziali** le equazioni in cui l'incognita compare nell'esponente di qualche potenza.*

Si studieranno le equazioni esponenziali che si possono ridurre alla forma canonica:

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}} \quad \text{con} \quad a > 0, a \neq 1$$

Risolvere un equazione, in cui i due membri sono potenze di una stessa base, equivale a risolvere un equazione in cui i due membri sono gli esponenti di tali potenze.

Quindi se $a > 0$ e $a \neq 1$ si ha:

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)} \quad (1)$$

Nota

Non tutte le equazioni esponenziali sono riducibili alla forma canonica.
Per risolvere le equazioni esponenziali in cui i due membri sono prodotti o quozienti di basi diverse, bisogna considerare i *logaritmi* di entrambi i membri (→*I logaritmi*).

RISOLUZIONE ALGEBRICA DELLE EQUAZIONI ESPONENZIALI ELEMENTARI

Esempi

Risolvere le equazioni:

1. $3^x = 9$

L'equazione data può essere posta in forma canonica scrivendola nella forma $3^x = 3^2$.
Per la (1) tale equazione equivale a $x=2$ e quindi la soluzione dell'equazione assegnata è 2 (la soluzione $x = 2$ è ottenuta da $3^x = 3^2$ passando agli esponenti).

2. $3^{2-8x} = 9^{3x+1}$

Poiché $9 = 3^2$, possiamo scrivere l'equazione data nella forma

$$3^{2-8x} = (3^2)^{3x+1} \longrightarrow 3^{2-8x} = 3^{6x+2}$$

da cui si deduce che deve essere, passando agli esponenti,

$$2-8x = 6x+2 \longrightarrow -14x = 0 \longrightarrow x = 0$$

3. $9^x = 6+3^x$

Poiché $9 = 3^2$, possiamo scrivere l'equazione data nella forma

$$(3^2)^x = 6+3^x \longrightarrow 3^{2x} = 6+3^x$$

Ponendo $y=3^x$, si ha:

$$y^2 = 6 + y \longrightarrow y^2 - y - 6 = 0 \longrightarrow y = 3 \vee y = -2$$

Da $y = 3 \longrightarrow 3^x = 3 \longrightarrow 3^x = 3^1 \longrightarrow x = 1$

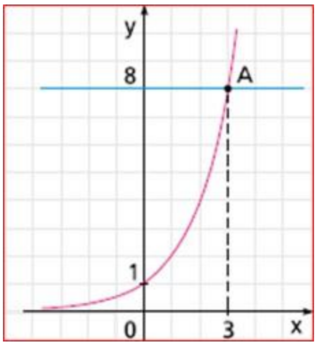
Da $y = -2 \longrightarrow 3^x = -2$ ⟶impossibile perché per $\forall x \in \mathbb{R}$ la potenza 3^x è > 0.

RISOLUZIONE GRAFICA DELLE EQUAZIONI ESPONENZIALI

Per risolvere graficamente un'equazione esponenziale bisogna trasformarla in una equivalente i cui due membri siano espressioni analitiche di funzioni delle quali si sappia tracciare il grafico. Risolvere graficamente l'equazione $f(x) = g(x)$ significa determinare le ascisse degli eventuali punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

Esempio

Risolvere graficamente l'equazione $2^x - 8 = 0$.



1. Trasformare l'equazione in $2^x = 8$ e quindi porre $y = 2^x$ e $y = 8$.
2. Si tratta quindi di determinare l'intersezione tra la curva esponenziale di equazione $y = 2^x$ e la retta, parallela all'asse delle ascisse, di equazione $y = 8$.
3. Il punto A, di intersezione tra la curva e la retta, ha ascissa uguale a 3, quindi la soluzione dell'equazione data è $x = 3$.

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

DEFINIZIONE

*Si dicono **disequazioni esponenziali** quelle disequazioni in cui l'incognita figura nell'esponente di almeno una potenza.*

La disequazione esponenziale più semplice, in forma canonica, è del tipo:

$$\boxed{a^{f(x)} < a^{g(x)}} \quad \text{con} \quad a > 0, a \neq 1$$

al posto del simbolo < possono comparire i simboli ≤, >, ≥ .

Per risolvere una disequazione esponenziale in forma canonica si devono distinguere due casi:

1. $a > 1 \quad \Rightarrow a^{f(x)} < a^{g(x)} \rightarrow f(x) < g(x)$
2. $0 < a < 1 \quad \Rightarrow a^{f(x)} < a^{g(x)} \rightarrow f(x) > g(x)$

Esempi

1. Risolvere la disequazione esponenziale $2^{x+1} < 2^{3x-2}$

Poiché la base delle potenze presenti in entrambi i membri è 2 > 1, si può passare agli esponenti conservando il verso della disequazione:

$$2^{x+1} < 2^{3x-2} \rightarrow x + 1 < 3x - 2 \rightarrow -2x < -3 \rightarrow 2x > 3 \rightarrow x > \frac{3}{2}$$

2. Risolvere la disequazione esponenziale $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1+3x}$

Poiché la base delle potenze presenti in entrambi i membri è $\frac{1}{3}$ e $0 < \frac{1}{3} < 1$, si può passare agli esponenti cambiando il verso della disequazione:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1+3x} \rightarrow 2x > 1 + 3x \rightarrow 2x - 3x > 1 \rightarrow -x > 1 \rightarrow x < -1$$

RISOLUZIONE GRAFICA DELLE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Una disequazione esponenziale elementare può essere risolta anche graficamente.

- Risolvere graficamente la disequazione $a^x > k$ equivale a determinare le ascisse dei punti della curva esponenziale di equazione $y = a^x$ aventi ordinata maggiore di k.
- Per risolvere graficamente la disequazione $a^x < k$ si devono considerare i punti del grafico di $y = a^x$ aventi ordinata minore di k e le ascisse di tali punti saranno le soluzioni della disequazione data.
- Analoghe considerazioni valgono per la risoluzione delle disequazioni $a^x \geq k$ e $a^x \leq k$.

Esempio

Risolvere graficamente la disequazione: $2^x > \frac{1}{2}$

Disegniamo la curva esponenziale di equazione $y = 2^x$ e la retta di equazione $y = \frac{1}{2}$

Le soluzioni della disequazione sono le ascisse dei punti della curva aventi ordinata maggiore di $\frac{1}{2}$, cioè dei punti che si trovano al di sopra della retta.

Poiché il punto A di intersezione tra la curva e la retta ha ascissa -1, si deduce che i punti richiesti sono quelli di ascissa maggiore dell'ascissa di A.

Quindi $x > x_A \longrightarrow x > -1$