

LA RETTA

Una funzione espressa da una equazione di primo grado nelle due incognite x e y ha come rappresentazione grafica (diagramma) sempre una retta.

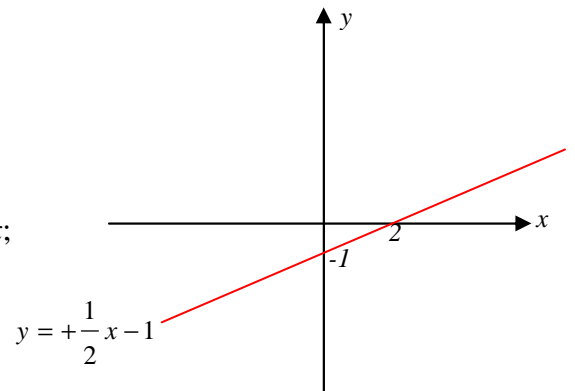
Tale equazione può essere data in due forme:

- **implicita:** $ax + by + c = 0$ dove a, b, c sono i coefficienti, di volta in volta diversi, che variando individuano le infinite rette del piano;

- **esplicita:** $y = mx + q$ dove

$$m = -\frac{a}{b} ; \quad q = -\frac{c}{b}$$

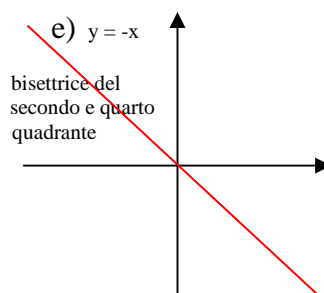
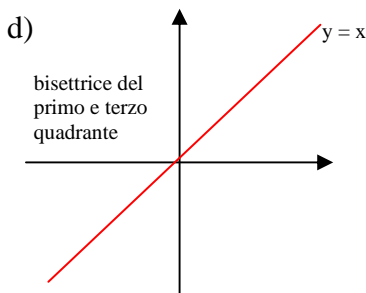
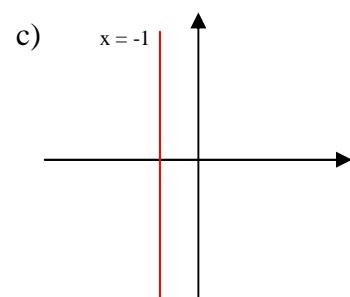
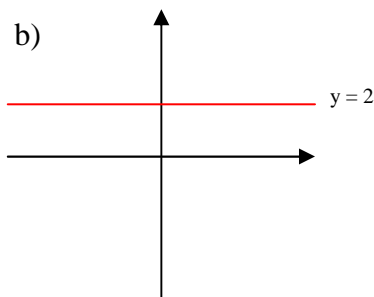
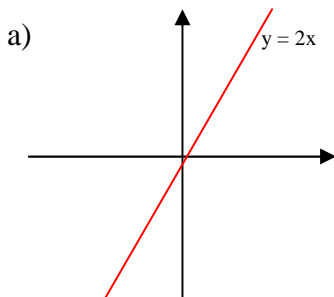
m è detto coefficiente angolare della retta (indica la pendenza della retta) ed è ottenuto dal rapporto $\Delta y / \Delta x$; q è il punto di intersezione con l'asse y .



Rette particolari

- a) se $c = 0$ ($y = mx$) la retta passa per l'origine (manca il termine noto);
- b) se $a = 0$ ($y = k$) la retta è parallela all'asse x (manca il termine con la x);
- c) se $b = 0$ ($x = k$) la retta è parallela all'asse y (manca il termine con la y).

ESEMPLI:



La retta d'equazione $y = 0$ è l'asse x , la retta d'equazione $x = 0$ è l'asse y .

Se il coefficiente angolare è positivo la retta è crescente (aumentando il valore della x , aumenta anche quello della y), se è negativo la retta è decrescente (aumentando la x diminuisce la y).

Rappresentazione grafica di una retta

Per rappresentare una retta basta individuare due punti (per due punti passa una ed una sola retta); se l'equazione è in forma esplicita uno dei due punti è $(0; q)$.

ESEMPIO: Data la retta di equazione $3x - y + 2 = 0$ conviene portarla nella forma esplicita $y = 3x + 2$ e poi assegnare due valori arbitrari alla x (ad esempio -1 e 1) per ottenere i corrispondenti valori della y

x	y
-1	-1
1	5

Condizione di appartenenza

Se vogliamo verificare se un punto $P(x_0; y_0)$ appartiene, o no, ad una retta, sostituiamo le sue coordinate nell'equazione; se il punto appartiene l'uguaglianza è verificata.

ESEMPIO: Data la retta $y = 2x - 3$ verificate se i punti $A(1; -1)$ e $B(3; 1)$ appartengono alla retta.

$$-1 = 2 \cdot 1 - 3 \rightarrow -1 = -1 \text{ vero, il punto } A(1; -1) \text{ appartiene alla retta;}$$

$$1 = 2 \cdot 3 - 3 \rightarrow 1 = 3 \text{ falso, il punto } B(3; 1) \text{ non appartiene alla retta.}$$

Rette parallele e perpendicolari

Due rette di coefficienti angolari m_1 e m_2 sono:

- parallele se $m_1 = m_2$ (coefficienti angolari uguali);
- perpendicolari se $m_1 \cdot m_2 = -1$ oppure $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ (coeff. ang. uno l'antireciproco dell'altro).

Retta passante per un punto (fascio proprio di rette)

Per un punto passano infinite rette (ognuna delle quali avrà coefficiente angolare diverso).

L'equazione di tutte le rette passanti per un punto dato $P(x_0; y_0)$ sarà: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$; conoscendo il coefficiente angolare, si può ricavare l'equazione di una determinata retta.

ESEMPIO: Sono dati il punto $P(-2; +3)$ e il coefficiente angolare $m = +2 \rightarrow$

$$y - 3 = 2 \cdot (x + 2) \rightarrow y = 2x + 2 \cdot 2 + 3 \rightarrow y = 2x + 7$$

Retta passante per due punti

Per determinare l'equazione della retta passante per i generici punti $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ si utilizza

la formula: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ escludendo il caso $x_1 = x_2$ (retta parallela all'asse y), e il caso

$y_1 = y_2$ (retta parallela all'asse x).

La formula si può anche scrivere nella forma $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ in cui $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$.

ESEMPIO: Dati i punti $A(1;2)$ e $B(3;-1)$ sostituendo nella formula si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{-1-2} &= \frac{x-1}{3-1} \rightarrow \frac{y-2}{-3} = \frac{x-1}{2} \rightarrow 2(y-2) = -3(x-1) \rightarrow 2y-4 = -3x+3 \\ &\rightarrow 3x+2y-7=0 \end{aligned}$$

Distanza di un punto da una retta

Per calcolare la distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta $ax + by + c = 0$ si utilizza la formula

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Nel caso in cui l'equazione della retta sia nella forma esplicita $y = mx + q$ si può utilizzare la

formula $d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

ESEMPIO: Dati il punto $P(3;-1)$ e la retta di equazione $3x + 4y - 1 = 0$ sostituendo nella

formula otterremo $d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|9 - 4 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5}$

Intersezione tra due rette

Date due generiche rette $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$, la loro intersezione (il punto che hanno in comune) si ottiene risolvendo il sistema formato dalle due rette.

- Se il sistema ammette una soluzione (determinato) le rette sono incidenti
 $m_1 \neq m_2 \wedge q_1 \neq q_2$ (se $q_1 = q_2$ è quello il punto d'intersezione)
- Se il sistema non ammette soluzioni (impossibile) le rette sono parallele
 $m_1 = m_2 \wedge q_1 \neq q_2$
- Se il sistema ammette infinite soluzioni (indeterminato) le rette sono coincidenti
 $m_1 = m_2 \wedge q_1 = q_2$

ESEMPIO: Date le rette di equazioni $2x - y + 1 = 0$ e $x + y - 7 = 0$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \text{ usando il metodo di sostituzione } \begin{cases} 2(-y + 7) - y + 1 = 0 \\ x = -y + 7 \end{cases} \text{ e risolvendo}$$

$$\begin{cases} -2y + 14 - y + 1 = 0 \\ x = -y + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2y - y = -14 - 1 \\ x = -y + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3y = -15 \\ x = -y + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -5 + 7 = 2 \end{cases}$$

$P(2;5)$ è il punto d'intersezione.