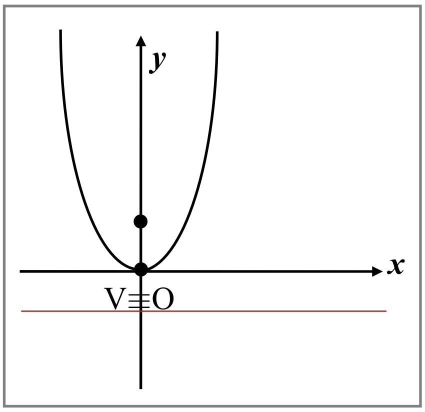
LA PARABOLA

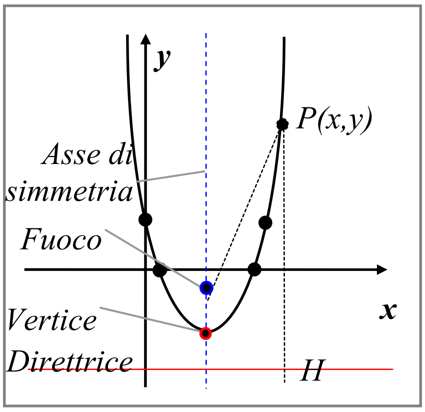
*La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso **F** detto **fuoco** e da una retta fissa detta **direttrice**.*

Parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y e passante per l'origine



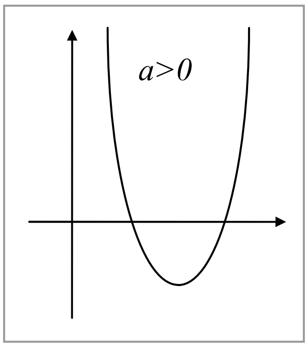
Equazione canonica	$y = ax^2$
Vertice	$V \equiv (0,0)$
Fuoco	$F \equiv \left(0, \frac{1}{4a}\right)$
Asse di simmetria	$x = 0$
Direttrice	$y = -\frac{1}{4a}$

Parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate

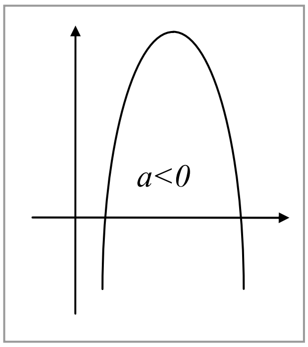


Equazione canonica	$y = ax^2 + bx + c$
Vertice	$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$
Fuoco	$F \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$
Asse di simmetria	$x = -\frac{b}{2a}$
Direttrice	$y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a}$

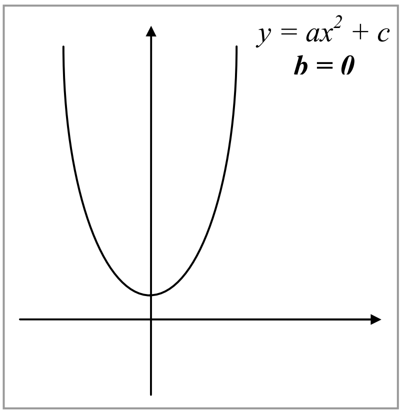
Casi particolari



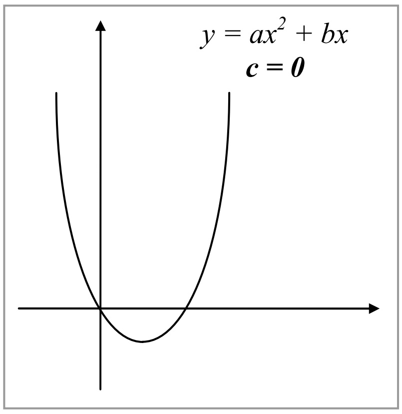
concavità verso l'alto



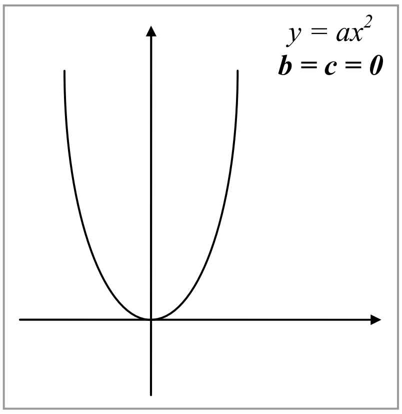
concavità verso il basso



F$\in$ asse y, V$\in$ asse y



passa per l'origine



V$\equiv$O

Grafico della parabola

Per eseguire il grafico della parabola si devono dapprima calcolare le coordinate del vertice, l'equazione dell'asse di simmetria e poi determinare le coordinate di altri punti (per es. i punti di intersezione con gli assi cartesiani) attribuendo un valore arbitrario alla x e calcolando il corrispondente valore della y.

Posizioni reciproche tra retta e parabola

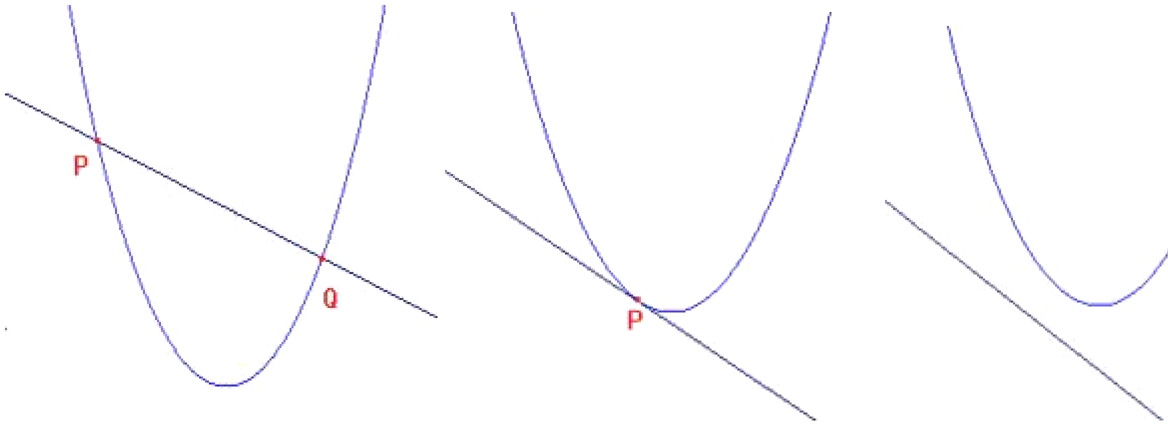
Per stabilire la posizione di una retta rispetto a una parabola e trovare gli eventuali punti di intersezione si risolve il sistema formato dalle equazioni della retta e della parabola.

Si imposta cioè, e si risolve, un sistema del tipo:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & \text{equazione generica della parabola} \\ y = mx + q & \text{equazione generica della retta} \end{cases}$$

Il sistema è di secondo grado, per cui ha al massimo due soluzioni, in accordo con il fatto, verificabile geometricamente, che retta e parabola possono avere al massimo due punti di intersezione.
Si possono presentare tre casi.

1. Il discriminante dell'equazione risolvente il sistema è maggiore di zero: in tal caso il sistema ha due soluzioni reali e distinte e la retta incontra la parabola in due punti; si dice allora che è ***secante***. Le coordinate dei punti di intersezione si trovano completando la risoluzione del sistema. Un caso particolare si ha quando la retta è una parallela all'asse di simmetria: allora retta e parabola si intersecano in un solo punto.
2. Il discriminante dell'equazione risolvente il sistema è uguale a zero: il sistema ha allora due soluzioni reali coincidenti e la retta tocca la parabola in un solo punto; si dice allora che è ***tangente***. Le coordinate del punto di tangenza si trovano completando la risoluzione del sistema.
3. Il discriminante dell'equazione risolvente è minore di zero: il sistema non ha soluzioni e la retta non incontra la parabola; si dice allora che è ***esterna***.



secante $\Delta > 0$ — tangente $\Delta = 0$ — esterna $\Delta < 0$

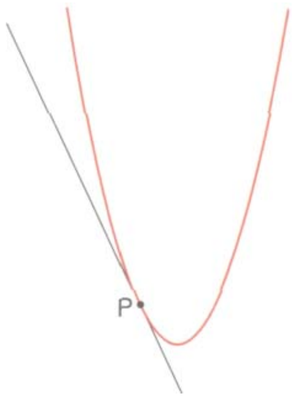
Rette tangenti a una parabola

Per <u>stabilire se una retta è tangente a una parabola</u>, basta controllare se il discriminante dell'equazione risolvente il sistema composto dalle equazioni di retta e parabola è uguale a zero.

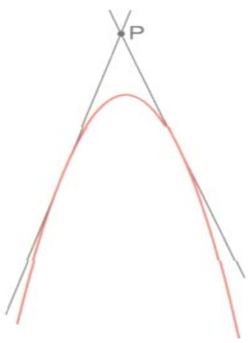
Procedimento per scrivere l'equazione della retta passante per un punto dato e tangente a una parabola di equazione nota.

Si possono presentare tre casi.

1. <u>Il punto appartiene alla parabola</u>: in tal caso si scrive il sistema formato dall'equazione della parabola e da quella della retta generica passante per il punto dato.
$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$
Si pone quindi uguale a zero il discriminante dell'equazione risolvente tale sistema, e si trova il valore di ***m*** che, sostituito nella equazione generica della retta, permette di scrivere l'equazione della retta cercata, tangente alla parabola. In questo caso ***m*** avrà un solo valore e la tangente sarà una sola.



2. Se <u>il punto è esterno alla parabola</u>, si procede come nel caso precedente: si troveranno però due valori di ***m*** che, sostituiti nell'equazione della retta generica, daranno due equazioni di due rette distinte, entrambe tangenti alla parabola. Per calcolare le coordinate dei punti di tangenza si risolvono separatamente i due sistemi ottenuti con l'equazione della parabola e ciascuna delle due rette



3. Se <u>il punto è interno alla parabola</u>, per esso non passa alcuna tangente alla parabola stessa; l’equazione ottenuta imponendo uguale a zero il discriminante non ha soluzione.

Ricerca dell’equazione della parabola noti tre elementi

l’equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ dipende dai tre parametri a, b, c, quindi è necessario impostare un sistema in tre equazioni nelle tre incognite a, b, c.

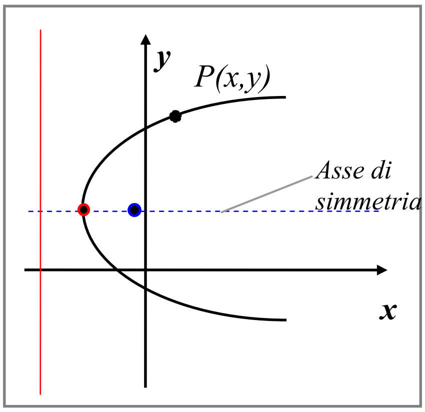
La parabola deve soddisfare le condizioni:	Allora si pone:
Passa per ***tre punti*** A, B, C dati;	Si applica la ***condizione di appartenenza*** di A, B, C alla curva. $\begin{array}{r} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ C \rightarrow \end{array} \begin{cases} y_A = ax_A^2 + bx_A + c \\ y_B = ax_B^2 + bx_B + c \\ y_C = ax_C^2 + bx_C + c \end{cases}$
Sono dati il ***vertice*** V e la ***direttrice***;	Si mettono a sistema le equazioni dell’ascissa e dell’ordinata del vertice uguagliate al loro valore e l’equazione della direttrice uguagliata al suo valore. $\begin{array}{r} x_V \rightarrow \\ y_V \rightarrow \\ eq.\ direttrice \rightarrow \end{array} \begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ y = -\dfrac{1 + b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$
Sono dati il ***fuoco*** F e il ***vertice*** V;	Si mettono a sistema le equazioni dell’ascissa e dell’ordinata del vertice e dell’ordinata del fuoco uguagliate al loro valore. $\begin{array}{r} x_V \rightarrow \\ y_V \rightarrow \\ y_F \rightarrow \end{array} \begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ y_F = \dfrac{1 - b^2 + 4ac}{4a} \end{cases}$
E’ dato il ***vertice*** V e passa per ***un punto*** P;	Si mettono a sistema le equazioni dell’ascissa e dell’ordinata del vertice uguagliate al loro valore e la condizione di appartenenza del punto alla curva. $\begin{array}{r} x_V \rightarrow \\ y_V \rightarrow \\ P \rightarrow \end{array} \begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ y_P = ax_P^2 + bx_P + c \end{cases}$

Sono dati il ***fuoco*** F e la ***direttrice***;	Si mettono a sistema le equazioni dell'ascissa e dell'ordinata del fuoco uguagliate al loro valore e l'equazione della direttrice uguagliata al suo valore. $\begin{array}{l} x_F \rightarrow \\ y_F \rightarrow \\ eq.\ direttrice \rightarrow \end{array} \begin{cases} x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ y_F = \dfrac{1-b^2+4ac}{4a} \\ y = -\dfrac{1+b^2-4ac}{4a} \end{cases}$

Parabola con asse di simmetria parallelo o coincidente con l'asse x

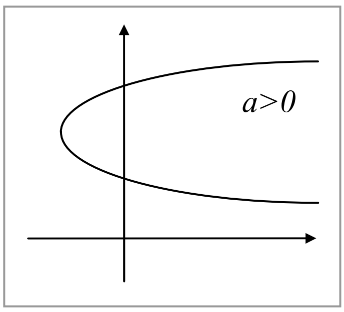
Se l'asse di simmetria è parallelo all'asse x, l'equazione della parabola è del tipo:

$$x = ay^2 + by + c$$

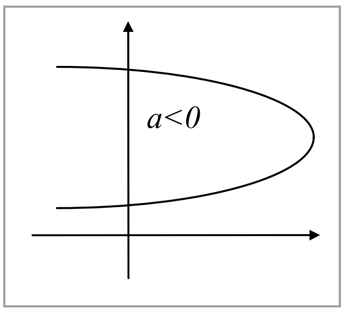


Equazione canonica	$x = ay^2 + by + c$
Vertice	$V \equiv \left(\dfrac{-b^2+4ac}{4a}, -\dfrac{b}{2a} \right)$
Fuoco	$F \equiv \left(\dfrac{1-b^2+4ac}{4a}, -\dfrac{b}{2a} \right)$
Asse di simmetria	$y = -\dfrac{b}{2a}$
Direttrice	$x = -\dfrac{1+b^2-4ac}{4a}$

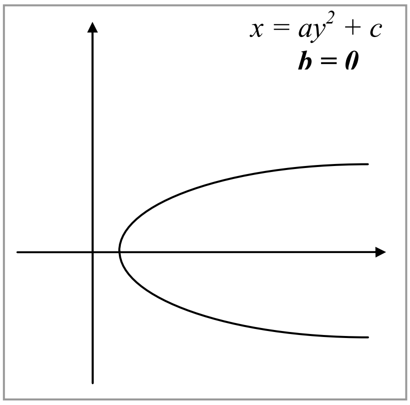
Casi particolari

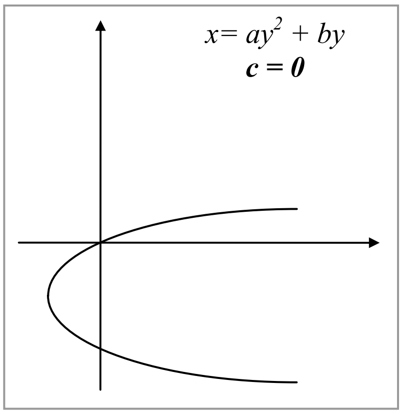


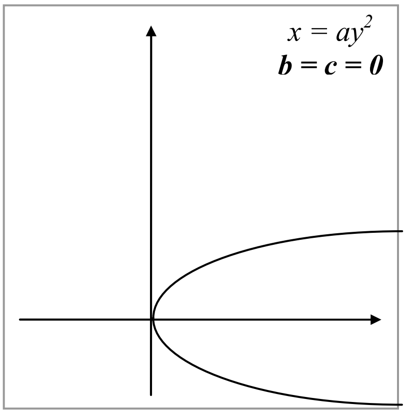
concavità verso destra



concavità verso sinistra







$F \in$ asse x, $V \in$ asse x

passa per l'origine

$V \equiv O$