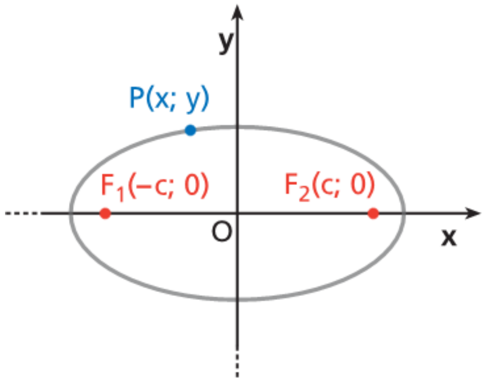
L'ELLISSE

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti ***fuochi***

Siano F_1 e F_2 i due fuochi; per ogni punto P dell'ellisse risulta per definizione:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$



<u>*Dimostrazione*</u>

Scegliamo un riferimento cartesiano con F_1 e F_2 sull'asse delle ascisse e l'origine coincidente con il punto medio del segmento F_1F_2

$F_1 = (-c;\ 0)$ $F_2 = (c;\ 0)$ con $0 < c < a$

Rispetto a tale riferimento, l'ellisse diventa l'insieme dei punti tali che

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a;$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2};$$
$$(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2};$$
$$4cx+4a^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2};$$
$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2};$$
$$c^2x^2+a^4+2a^2cx=a^2x^2+a^2y^2+2a^2cx+a^2c^2;$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

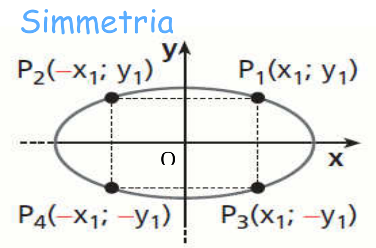
Posto $b^2=a^2-c^2>0$ si ha:

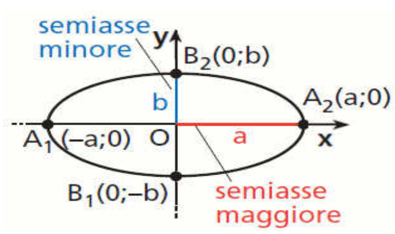
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

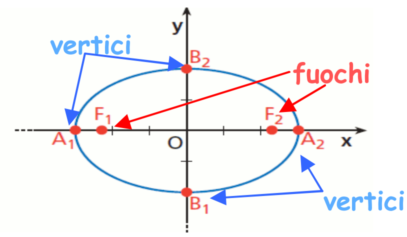
equazione canonica dell'ellisse

Ellisse con centro nell'origine degli assi

1° caso : Ellisse con i fuochi sull'asse x $\boxed{a>b}$

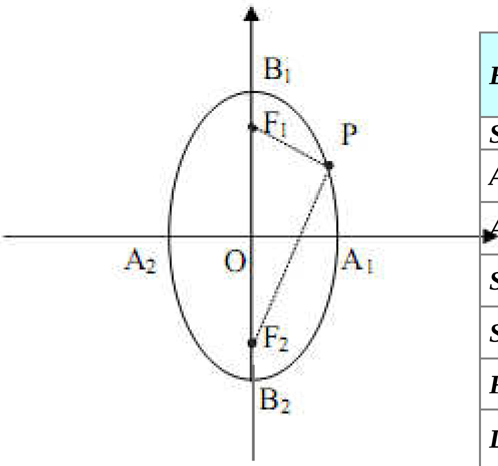






Equazione canonica	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Simmetria	rispetto agli assi cartesiani e rispetto all'origine
Asse maggiore	$\overline{AA'}=2a$
Asse minore	$\overline{BB'}=2b$
Semiasse maggiore	$\overline{OA}=a$
Semiasse minore	$\overline{OB}=b$
Fuochi	$F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$
Distanza focale	$\overline{F_1F_2}=2c$
Semidistanza focale	$\overline{OF_2}=c$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$
Vertici	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$
Eccentricità	$e=\dfrac{c}{a}$, $0\le e<1$

2° caso : Ellisse con i fuochi sull'asse y $\boxed{a < b}$



Equazione canonica	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Simmetria	rispetto agli assi cartesiani e rispetto all'origine
Asse maggiore	$\overline{BB'} = 2b$
Asse minore	$\overline{AA'} = 2a$
Semiasse maggiore	$\overline{OB} = b$
Semiasse minore	$\overline{OA} = a$
Fuochi	$F_1(0;-c)$ $F_2(0;c)$
Distanza focale	$\overline{F_1F_2} = 2c$
Semidistanza focale	$\overline{OF_2} = c$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Vertici	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$
Eccentricità	$e = \frac{c}{b}$, $0 \le e < 1$

L'eccentricità

L'eccentricità è il rapporto fra la semidistanza focale e il semiasse maggiore.

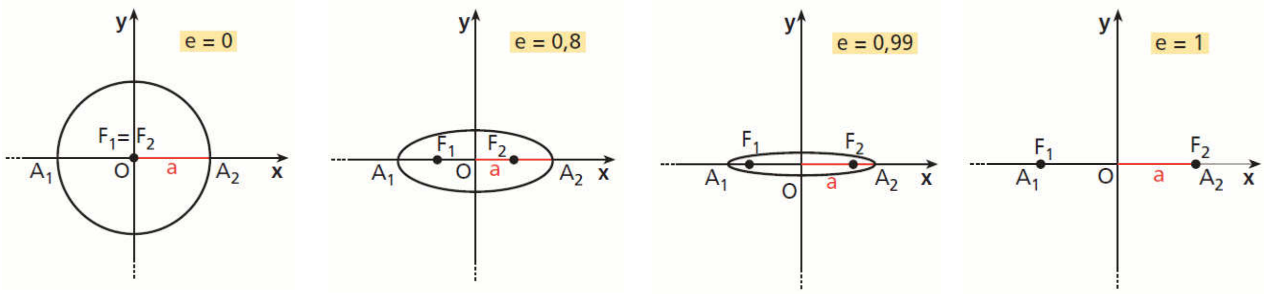
$$e = \frac{c}{a},\ se\ \ a > b \quad oppure \quad e = \frac{c}{b},\ se\ \ a < b$$

Poiché 0 < c < a, sarà sempre $0 \le e < 1$.

L'eccentricità misura lo *schiacciamento* dell'ellisse sul suo asse maggiore; più è prossima a 1, più l'ellisse è schiacciata.

- Se e = 0, risulta c=0, ossia a=b. L'equazione dell'ellisse diventa perciò $x^2 + y^2 = a^2$, cioè l'ellisse diventa una *circonferenza*.

- Se e = 1, risulta c=a, ossia b=0. L'ellisse degenera nel *segmento* che unisce i due fuochi.



Posizioni reciproche tra retta ed ellisse

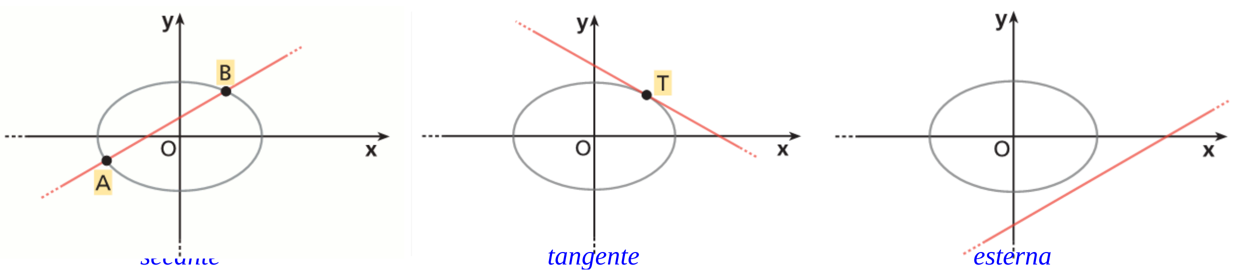
Per stabilire la posizione di una retta rispetto a un'ellisse e trovare gli eventuali punti di intersezione, si risole il sistema formato dall'equazione della retta e quella dell'ellisse.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \textit{equazione generica dell'ellisse} \\ y=mx+q & \textit{equazione generica della retta} \end{cases}$$

Si possono presentare tre casi.

1. Il discriminante dell'equazione risolvente il sistema è maggiore di zero: in tal caso il sistema ha due soluzioni reali e distinte e la retta incontra l'ellisse in due punti; si dice allora che è ***secante***. Le coordinate dei punti di intersezione si trovano completando la risoluzione del sistema.
2. Il discriminante dell'equazione risolvente il sistema è uguale a zero: il sistema ha allora due soluzioni reali coincidenti e la retta tocca l'ellisse in un solo punto; si dice allora che è ***tangente***. Le coordinate del punto di tangenza si trovano completando la risoluzione del sistema.
3. Il discriminante dell'equazione risolvente è minore di zero: il sistema non ha soluzioni e la retta non incontra l'ellisse; si dice allora che è ***esterna***.

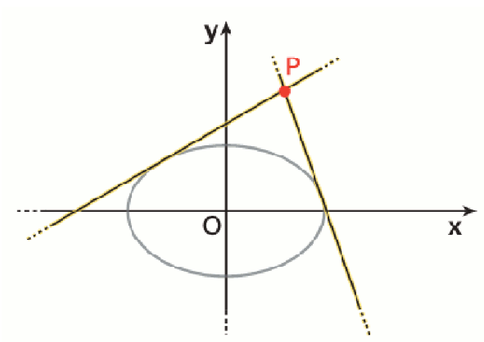
Se $\Delta>0$ la retta è secante (il sistema ha 2 soluzioni distinte)
Se $\Delta=0$ la retta è tangente (il sistema ha 2 soluzioni coincidenti)
Se $\Delta<0$ la retta è esterna (il sistema non ha soluzioni reali)



secante tangente esterna

Determinazione delle rette tangenti a un'ellisse da un punto dato

1° caso: Il punto è ***esterno*** all'ellisse $\Rightarrow$ le rette tangenti sono due

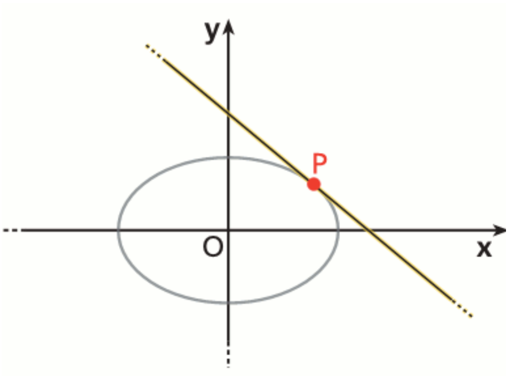


Se il punto ha coordinate $P(x_0;\ y_0)$ bisogna scrivere l'equazione del fascio di rette passanti per il punto e metterlo a sistema con l'equazione dell'ellisse:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \textit{equazione generica dell'ellisse} \\ y-y_P=m(x-x_P) & \textit{equazione del fascio di rette passanti per P} \end{cases}$$

Infine si pone uguale a zero il discriminante dell'equazione risolvente il sistema ($\Delta=0$, *condizione di tangenza*) e si trovano i due valori del coefficiente angolare *m* che, sostituiti nell'equazione del fascio di rette per P, daranno le equazioni delle due rette tangenti all'ellisse.

2° caso: Il punto ***appartiene*** all'ellisse $\Rightarrow$ la retta tangente è una sola

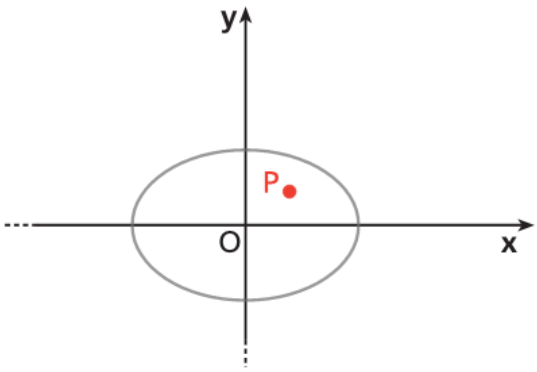


Se il punto ha coordinate $P(x_0;\ y_0)$ ed appartiene all'ellisse, bisogna scrivere l'equazione del fascio di rette passanti per il punto e metterlo a sistema con l'equazione dell'ellisse:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \text{equazione generica dell'ellisse} \\ y-y_P=m(x-x_P) & \text{equazione del fascio di rette passanti per P} \end{cases}$$

Infine si pone uguale a zero il discriminante dell'equazione risolvente il sistema ($\Delta=0$, *condizione di tangenza*) e si trova il valore del coefficiente angolare *m* che, sostituito nell'equazione del fascio di rette per P, darà l'equazione dell'unica retta tangente all'ellisse.

3° caso: Il punto è ***interno*** all'ellisse $\Rightarrow$ non esiste alcuna retta tangente



Se il punto ha coordinate $P(x_0;\ y_0)$ ed è interno all'ellisse, per esso non passa alcuna tangente all'ellisse (infatti, in questo caso, l'equazione ottenuta ponendo $\Delta=0$ non ha soluzioni in $\Re$).

ELLISSE TRASLATA

*Un' ellisse si dice **traslata** se i suoi assi sono paralleli agli assi cartesiani.*

Il centro dell'ellisse traslata è un punto diverso dall'origine degli assi e la sua equazione deriva da quelle precedenti alle quali si applica la traslazione del centro O(0; 0) nel nuovo centro O'(x_0; y_0), secondo il vettore *v*(x_0; y_0) con le sostituzioni $x \to x - x_0$, $y \to y - y_0$.
L'equazione dell'ellisse sarà:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$