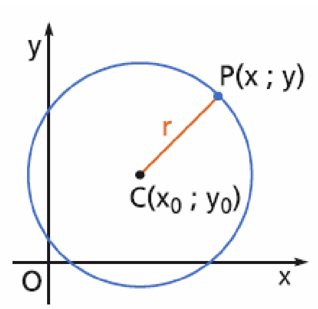
LA CIRCONFERENZA

*La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso **C** detto **centro**.*

La distanza fra i punti della circonferenza e il centro è detta **raggio** della circonferenza.

L'equazione della circonferenza



Indicato con C(x_0; y_0) il centro della circonferenza e con P(x; y) un punto generico della stessa la distanza PC è uguale al raggio r:

$$\overline{PC} = r \quad \longrightarrow \quad \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

da cui, elevando al quadrato, si ottiene:

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2}$$

Equazione cartesiana della circonferenza

Sviluppando si ottiene:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2 \quad \longrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Ponendo $-2x_0 = a$ $\quad -2y_0 = b$ $\quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$ si ha:

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

Equazione in forma normale o canonica

Da notare che l'equazione di una circonferenza in forma canonica:
- è di secondo grado in x e y;
- non contiene il termine "rettangolare" di secondo grado xy;
- ha i coefficienti dei termini x^2 e y^2 uguali a 1.

Le coordinate x_0 e y_0 del centro C della circonferenza si ricavano da:

$$\left.\begin{array}{l} -2x_0 = a \rightarrow x_0 = -\dfrac{a}{2} \\ -2y_0 = b \rightarrow y_0 = -\dfrac{b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

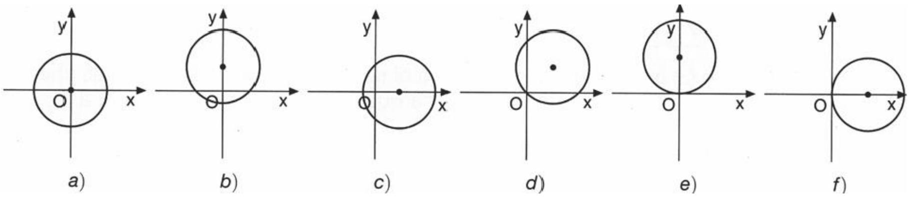
Il raggio si ricava dalla $x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c$ tenendo conto che $x_0 = -\dfrac{a}{2}$ e $y_0 = -\dfrac{b}{2}$

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c \quad \longrightarrow \quad r^2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c$$ da cui $$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

e

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$ (ovviamente $\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - c \geq 0$, altrimenti non si tratta di una circonferenza).

Relazioni fra i parametri a,b,c e il grafico della circonferenza:



Coefficienti: a, b, c	Caratteristiche	Equazione
$a = b = 0$	ha centro in O (fig. **a**)	$x^2 + y^2 + c = 0$
$a = 0$	ha centro sull'asse y (fig. **b**)	$x^2 + y^2 + by + c = 0$
$b = 0$	ha centro sull'asse x (fig. **c**)	$x^2 + y^2 + ax + c = 0$
$c = 0$	passa per l'origine O (fig. **d**)	$x^2 + y^2 + ax + by = 0$
$a = c = 0$	ha centro sull'asse y, passa per l'origine O ed è tangente all'asse x (fig. **e**)	$x^2 + y^2 + by = 0$
$b = c = 0$	ha centro sull'asse x, passa per l'origine O ed è tangente all'asse y (fig. **f**)	$x^2 + y^2 + ax = 0$

Equazione della circonferenza che soddisfa determinate condizioni

La curva $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ dipende da tre parametri *a, b, c*, quindi per determinarla sono necessari tre elementi.

Esaminiamo alcuni casi:

a) **Equazione della circonferenza note le coordinate del centro e il raggio**
È sufficiente applicare la definizione di circonferenza, essendo C(x_0; y_0) e *r* il raggio, si può scrivere l'equazione:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

da cui, sviluppando i calcoli, si trova 1'equazione cercata.

b) **Equazione della circonferenza note le coordinate del centro C e un punto P**
Si può operare in due modi:
- calcolare la distanza fra centro e punto, che da il raggio e tornare al caso a)
- sostituire nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ le coordinate del punto e i valori $a = -2x_0$ e $b = -2y_0$ e così ricavare c.

c) **Equazione della circonferenza note le coordinate di tre punti**
Dati i punti $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ le coordinate di ciascuno di essi verificano l'equazione della circonferenza, quindi si può scrivere il sistema

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ C \rightarrow \end{array} \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano a, b, c che poi devono essere sostituiti nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

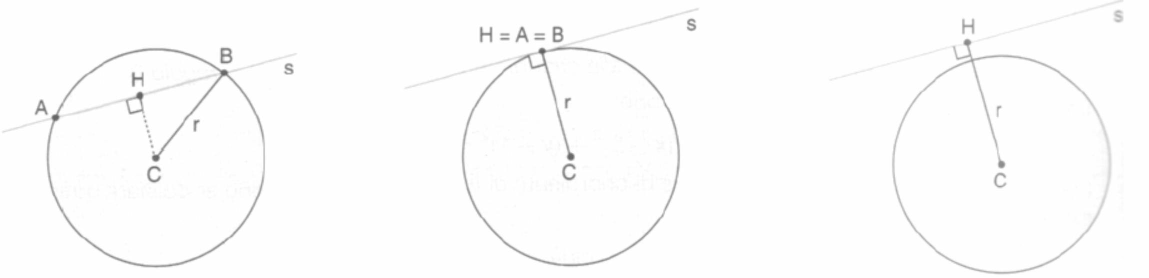
Posizioni reciproche tra retta e circonferenza

Date nel piano una retta *s* e una circonferenza di centro C e raggio *r*, per determinare le coordinate dei loro eventuali punti di intersezione, è necessario risolvere il sistema costituito dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x = k \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \end{cases}$$

Detto dunque Δ il discriminante dell'equazione di 2° grado risolvente il sistema, si può verificare uno, e uno solo, dei seguenti casi:

$\boxed{\Delta > 0}$	$\boxed{\Delta = 0}$	$\Delta < 0$
⇓	⇓	⇓
RETTA SECANTE	RETTA TANGENTE	RETTA ESTERNA
⇓	⇓	⇓
Due punti di intersezione *distinti: A* e B	Due punti di intersezione *coincidenti:* $A = B = H$	*Nessuna intersezione*
⇓	⇓	⇓
$\overline{CH} < r$	$\overline{CH} = r$	$\overline{CH} > r$



Rette tangenti a una circonferenza

Per stabilire se una retta è tangente a una circonferenza, basta controllare se il discriminante dell'equazione risolvente il sistema composto dalle equazioni di retta e circonferenza è uguale a zero.

Procedimento per scrivere l'equazione della retta passante per un punto dato e tangente a una circonferenza di equazione nota.

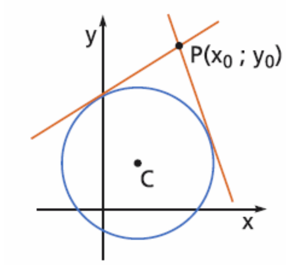
Si possono presentare due casi.

1. Il punto è esterno alla circonferenza

Per trovare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza possiamo procedere in due diversi modi:

− *Primo metodo*

Scrivere il sistema formato dall'equazione della circonferenza e da quella della retta generica passante per il punto dato.



$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Si pone quindi uguale a zero il discriminante dell'equazione risolvente tale sistema, e si trovano i due valori di ***m*** che, sostituiti nella equazione generica della retta, permettono di scrivere le equazioni delle rette cercate, tangenti alla circonferenza. In questo caso ***m*** avrà due valori e le tangenti saranno due.

− *Secondo metodo*

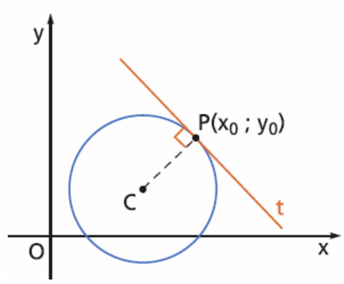
Imporre alla generica retta passante per P $\left[y - y_P = m(x - x_P)\right]$ di avere dal centro C della circonferenza distanza $d = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ uguale al raggio della circonferenza stessa; si otterrà un'equazione in ***m*** che risolta darà i coefficienti angolari delle due rette tangenti.

2. Il punto appartiene alla circonferenza,

− *Terzo metodo*

Poiché il raggio è perpendicolare alla tangente in P alla circonferenza, basta ricavare il coefficiente angolare della retta PC con la formula

$$m = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C}$$



e poi sostituire il valore di m trovato nell'equazione

$$y - y_P = -\frac{1}{m}\left(x - x_P\right)$$

− *Quarto metodo* (*formula di sdoppiamento*)

Si sostituisce nell'equazione della circonferenza

$$x^2 \text{ con } x_0 x \qquad y^2 \text{ con } y_0 y \qquad x \text{ con } \frac{x + x_0}{2} \qquad y \text{ con } \frac{y + y_0}{2}$$

e si ottiene:

$$x_0 x + y_0 y + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

che rappresenta l'equazione della retta tangente alla circonferenza nel suo punto P(x_0; y_0).

Nota: per scrivere l'equazione della retta tangente alla circonferenza in un suo punto è possibile applicare i due procedimenti descritti nel caso precedente.