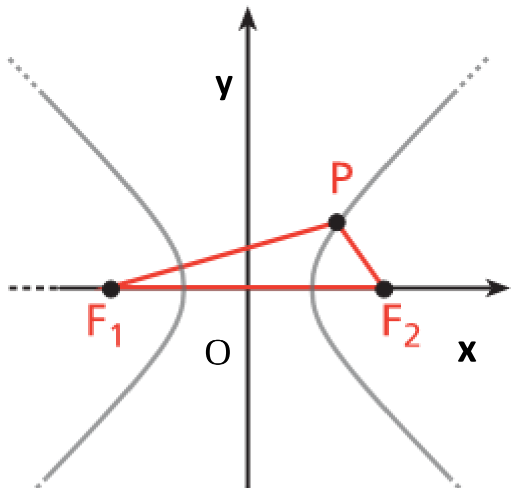
L'IPERBOLE

> *L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti* ***fuochi****.*

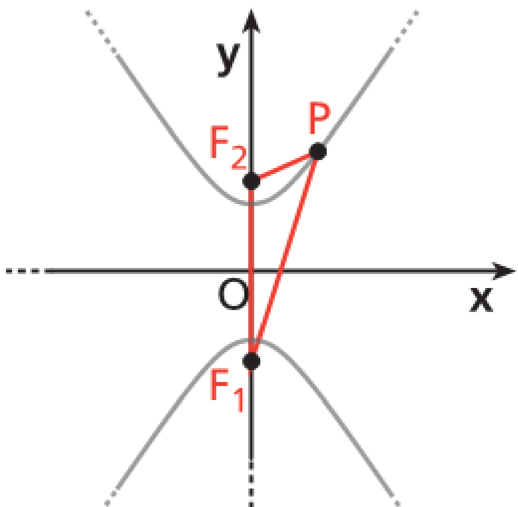
Siano ***F₁*** e ***F₂*** i due fuochi; per ogni punto ***P*** dell'iperbole risulta per definizione:

$$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF}_2\right|=2a$$



Fuochi su asse x

- La distanza tra i due fuochi è detta **distanza focale** ed è $\overline{F_1F_2}=2c$.
- Il punto medio di $\overline{F_1F_2}$ è detto **centro** dell'iperbole.
- Dal triangolo PF_1F_2 si deduce che $\overline{F_1F_2}>\overline{PF}_1-\overline{PF_2}\Rightarrow$ 2c>2a e quindi **c>a.**
- E' costituita da due rami distinti.
- Gli assi **x** e **y** si dicono **assi** dell'iperbole e sono *assi di simmetria.*



Fuochi su asse y

<u>*Dimostrazione*</u>

Scegliamo un riferimento cartesiano con <u>*F₁* e *F₂* sull'asse delle ascisse</u> e l'origine coincidente con il punto medio del segmento F_1F_2

$F_1=(-c;\ 0)$ $F_2=(c;\ 0)$ con 0 < a < c

Rispetto a tale riferimento, l'iperbole diventa l'insieme dei punti tali che

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx+\cancel{y^2}=4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx+\cancel{y^2}+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4cx-4a^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-\cancel{4}\left(cx+a^2\right)=\cancel{4}a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-cx-a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$c^2x^2+a^4+2a^2cx=a^2\left[(x+c)^2+y^2\right]$$

$$c^2x^2+a^4+\underline{2a^2cx}=a^2x^2+a^2c^2+\underline{2a^2cx}+a^2y^2$$

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

Posto $b^2=c^2-a^2>0$ si ha:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

$$\frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}}-\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}$$

e quindi:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

equazione canonica dell'iperbole aventi i fuochi sull'asse x

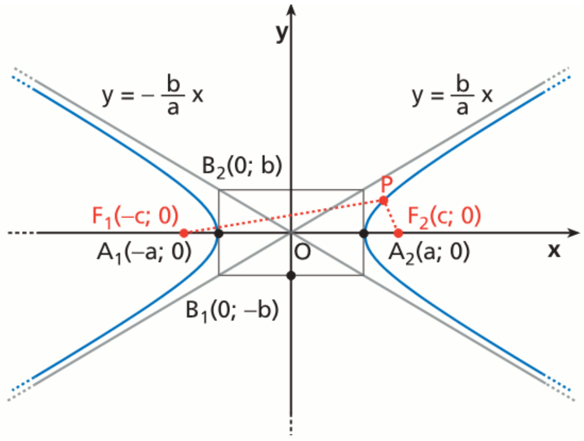
Analogamente si può dimostrare che, avendo posto $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF}_2\right|=2b$ e $c^2-b^2=a^2$, l'equazione è:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1}$$

equazione canonica dell'iperbole aventi i fuochi sull'asse y

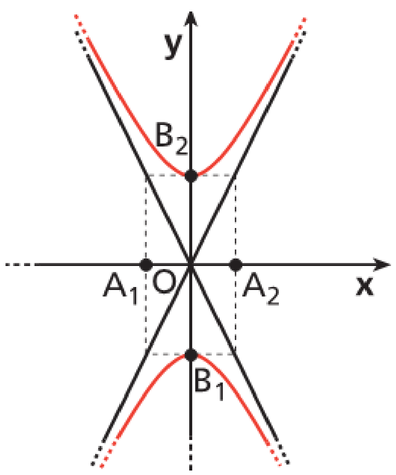
Iperbole con centro nell'origine degli assi

1° caso: Iperbole con i fuochi sull'asse x



Equazione canonica	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Simmetria	rispetto agli assi cartesiani e rispetto all'origine
Asse trasverso	$\overline{AA'} = 2a$
Asse non trasverso	$\overline{BB'} = 2b$
Semiasse trasverso	$\overline{OA} = a$
Semiasse non trasverso	$\overline{OB} = b$
Fuochi	$F_1(-c;0)\ F_2(c;0)$
Distanza focale	$\overline{F_1F_2} = 2c$
Semidistanza focale	$\overline{OF_2} = c$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Vertici	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$
Asintoti	$y = \pm\frac{b}{a}x$
Eccentricità	$e = \frac{c}{a}$, $e > 1$

2° caso: Iperbole con i fuochi sull'asse y



Equazione canonica	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
Simmetria	rispetto agli assi cartesiani e rispetto all'origine
Asse trasverso	$\overline{BB'} = 2b$
Asse non trasverso	$\overline{AA'} = 2a$
Semiasse trasverso	$\overline{OB} = b$
Semiasse non trasverso	$\overline{OA} = a$
Fuochi	$F_1(0;-c)\ F_2(0;c)$
Distanza focale	$\overline{F_1F_2} = 2c$
Semidistanza focale	$\overline{OF_2} = c$, $c = \sqrt{b^2 + a^2}$
Vertici	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$
Asintoti	$y = \pm\frac{b}{a}x$
Eccentricità	$e = \frac{c}{b}$, $e > 1$

L'eccentricità

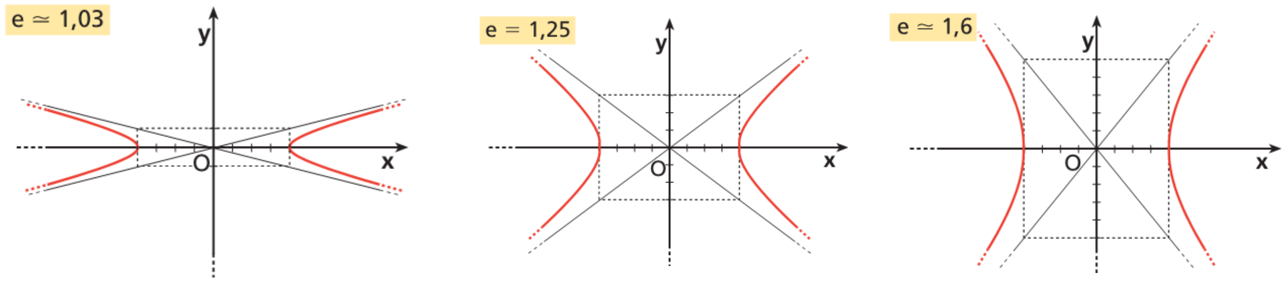
L'eccentricità è il rapporto fra la semidistanza focale e il semiasse trasverso.

$$e = \frac{c}{a}, \quad \text{(per l'iperbole con i fuochi sull'asse x)}$$

$$e = \frac{c}{b} \quad \text{(per l'iperbole con i fuochi sull'asse y)}$$

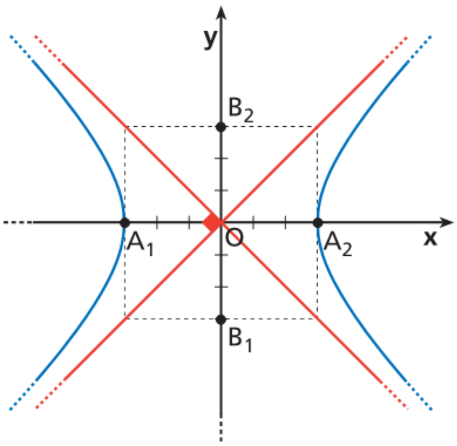
Poiché c > a e c > b sarà sempre $e > 1$.

L'eccentricità misura lo *schiacciamento* dell'iperbole sul suo asse trasverso; più è prossima a 1, più l'iperbole è schiacciata.



L'IPERBOLE EQUILATERA

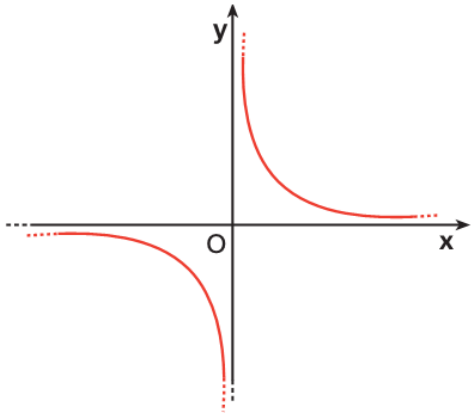
L'iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria



Se nell'equazione canonica dell'iperbole si ha $\boxed{a = b}$, l'iperbole si dice **equilatera.**

Iperbole equilatera *con i*	*fuochi sull'asse* **x**	*fuochi sull'asse* **y**
Equazione canonica	$x^2 - y^2 = a^2$	$x^2 - y^2 = -a^2$
Fuochi	$F_1\left(-a\sqrt{2};0\right)$, $F_2\left(a\sqrt{2};0\right)$	$F_1\left(0;-a\sqrt{2}\right)$, $F_2\left(0;a\sqrt{2}\right)$
Distanza focale	$\overline{F_1F_2} = 2c$	$\overline{F_1F_2} = 2c$
Semidistanza focale	$c = a\sqrt{2}$	$c = a\sqrt{2}$
Vertici	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-a)$, $B_2(0;a)$	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-a)$, $B_2(0;a)$
Asintoti *(sono le bisettrici dei quadranti e sono perpendicolari fra loro)*	$y = x$	$y = -x$
Eccentricità	$e = \sqrt{2}$	$e = \sqrt{2}$

L'iperbole equilatera riferita agli asintoti

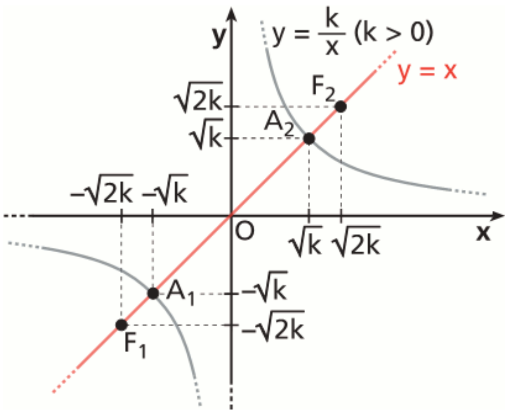


Iperbole equilatera ottenuta facendo ruotare il sistema xOy di un angolo di 45° o di 135° attorno a O. Gli asintoti diventano quindi gli assi X e Y.
La sua equazione è:

$$\boxed{xy = k}, \; k \in \Re_0$$

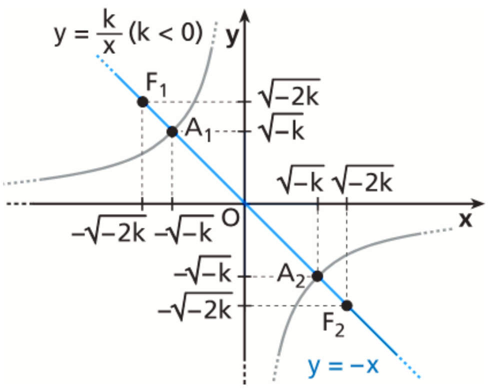
con $k = \pm \dfrac{a^2}{2}$

1° caso k>0 $\Longrightarrow$ l'iperbole è situata nel 1° e 3° quadrante



Equazione canonica	$xy = k$ con $k > 0$
Semiasse trasverso	Distanza tra vertice e origine OA_1
Fuochi	$F_1\left(-\sqrt{2k};-\sqrt{2k}\right), F_2\left(\sqrt{2k};\sqrt{2k}\right)$
Semidistanza focale	$c = a\sqrt{2}$
Vertici	$A_1\left(-\sqrt{k};-\sqrt{k}\right), A_2\left(\sqrt{k};\sqrt{k}\right)$
Asintoti	$x = 0, \; y = 0$

2° caso k<0 $\Longrightarrow$ l'iperbole è situata nel 2° e 4° quadrante



Equazione canonica	$xy = k$ con $k < 0$
Semiasse trasverso	Distanza tra vertice e origine OA_1
Fuochi	$F_1\left(-\sqrt{-2k};\sqrt{-2k}\right)$, $F_2\left(\sqrt{-2k};-\sqrt{-2k}\right)$
Semidistanza focale	$c = a\sqrt{2}$
Vertici	$A_1\left(-\sqrt{-k};\sqrt{-k}\right)$, $A_2\left(\sqrt{-k};-\sqrt{-k}\right)$
Asintoti	$x = 0, \; y = 0$

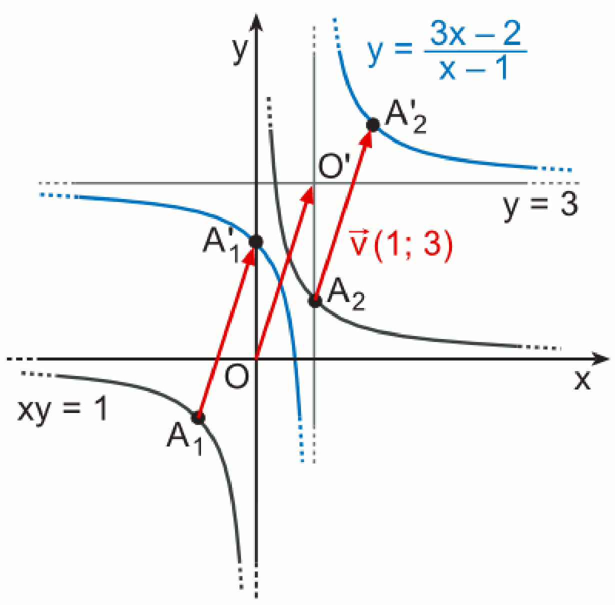
L'IPERBOLE TRASLATA

L'iperbole è detta **traslata** se ha centro in un punto $C(x_C;\ y_C)$ e assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani, di equazioni $x = x_C$ e $y = y_C$. Si presentano due casi.

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$	asse trasverso parallelo all'asse x $\left\lvert \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right\rvert = 2a$	asse trasverso parallelo all'asse y $\left\lvert \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right\rvert = 2b$
equazione canonica	$\frac{(x-x_C)^2}{a^2} - \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-x_C)^2}{a^2} - \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = -1$ $\left(-\frac{(x-x_C)^2}{a^2} + \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1\right)$
coordinate vertici	$A_1(x_C - a;\ y_C)$, $A_2(x_C + a;\ y_C)$	$B_1(x_C;\ y_C - b)$, $B_2(x_C;\ y_C + b)$
coordinate vertici non reali	$B_1(x_C;\ y_C - b)$, $B_2(x_C;\ y_C + b)$	$A_1(x_C - a;\ y_C)$, $A_2(x_C + a;\ y_C)$
coordinate fuochi	$F_1(x_C - c;\ y_C)$, $F_2(x_C + c;\ y_C)$	$F_1(x_C;\ y_C - c)$, $F_2(x_C;\ y_C + c)$
relazione tra i parametri	$a^2 + b^2 = c^2$	
lunghezza asse trasverso	$\overline{A_1A_2} = 2a$	$\overline{B_1B_2} = 2b$
lunghezza asse non trasverso	$\overline{B_1B_2} = 2b$	$\overline{A_1A_2} = 2a$
distanza focale	$\overline{F_1F_2} = 2c$	
eccentricità e, $e > 1$	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$
equazioni asintoti	$y = \pm\frac{b}{a}(x - x_C) - y_C$	

Esempio:
All'iperbole di equazione $\boldsymbol{xy = 1}$ è applicata una traslazione di vettore (1; 3). L'equazione dell'iperbole traslata è

$$y = \frac{3x-2}{x-1}.$$

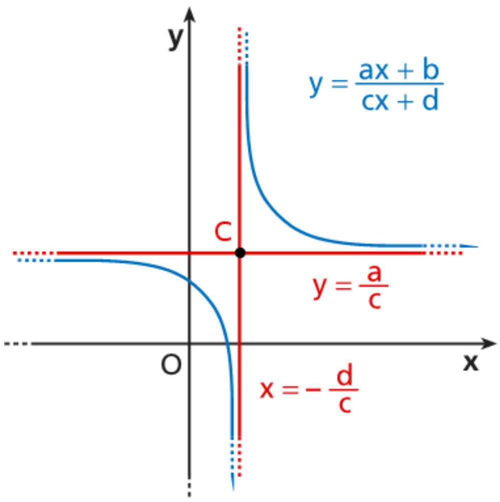


L'IPERBOLE OMOGRAFICA

Se si applica una traslazione all'iperbole equilatera riferita agli asintoti si ottiene la **funzione omografica** di equazione

$$y=\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}\text{, con } a,b,c,d\in\Re, c\neq 0, bc-ad\neq 0$$

avente dominio $\mathcal{D}=\left\{\forall x\in\mathbb{R}\mid x\neq -\frac{d}{c}\right\}$.



Equazione canonica	$y=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$
Assi di simmetria	$y=\pm(x-x_C)-y_C$ sono paralleli alle bisettrici dei quadranti e passano per il centro C
Centro di simmetria	$C\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$
Asintoti	$x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$

<u>Nota</u>

- Se c=0, la funzione omografica <u>degenera</u> nella retta di equazione

$$y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$$

- Se c≠0 ma ad=bc la funzione omografica <u>degenera</u> nella retta di equazione

$$y=\frac{a}{c}\ .$$

Posizioni reciproche tra retta ed iperbole

Per stabilire la posizione di una retta rispetto a un'iperbole e trovare gli eventuali punti di intersezione, si risole il sistema formato dall'equazione della retta e quella dell'iperbole.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \textit{equazione generica dell'iperbole} \\ y=mx+q & \textit{equazione generica della retta} \end{cases}$$

Si possono presentare tre casi.

1° caso *L'equazione risolvente il sistema è di secondo grado*

A. Il discriminante $(\Delta>0)$ dell'equazione risolvente il sistema è maggiore di zero: in tal caso il sistema ha due soluzioni reali e distinte e la retta incontra l'iperbole in due punti; si dice allora che la retta è ***secante***. Le coordinate dei punti di intersezione si trovano completando la risoluzione del sistema.
B. Il discriminante $(\Delta=0)$ dell'equazione risolvente il sistema è uguale a zero: il sistema ha allora due soluzioni reali coincidenti e la retta tocca l'iperbole in un solo punto; si dice allora che la retta è ***tangente***. Le coordinate del punto di tangenza si trovano completando la risoluzione del sistema.
C. Il discriminante $(\Delta<0)$ dell'equazione risolvente è minore di zero: il sistema non ha soluzioni e la retta non incontra l'iperbole; si dice allora che la retta è ***esterna***.

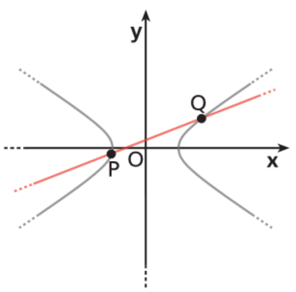
Se $\Delta>0$ la retta è secante (il sistema ha 2 soluzioni distinte)
Se $\Delta=0$ la retta è tangente (il sistema ha 2 soluzioni coincidenti)
Se $\Delta<0$ la retta è esterna (il sistema non ha soluzioni reali)

2° caso *L'equazione risolvente il sistema è di primo grado*

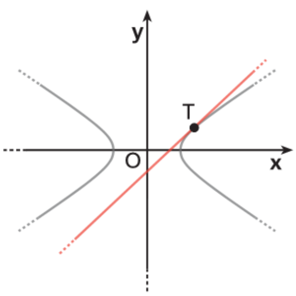
La retta è secante l'iperbole in un punto e parallela ad un asintoto.

3° caso *L'equazione risolvente il sistema è di grado zero* $(0\cdot x=b\neq 0)$

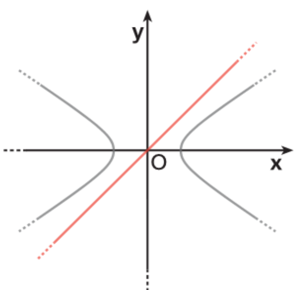
La retta è un asintoto.



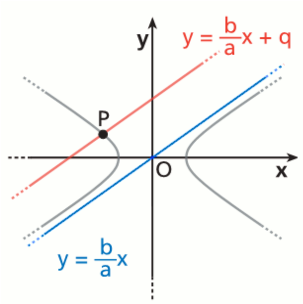
Secante



Tangente



Esterna



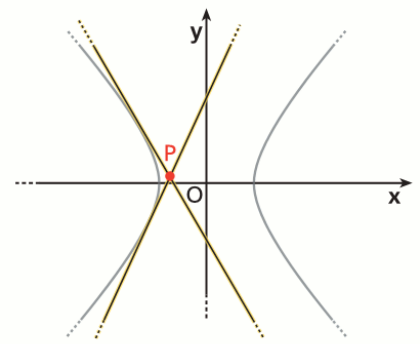
Secante e parallela a un asintoto

■ Determinazione delle rette tangenti a un'iperbole

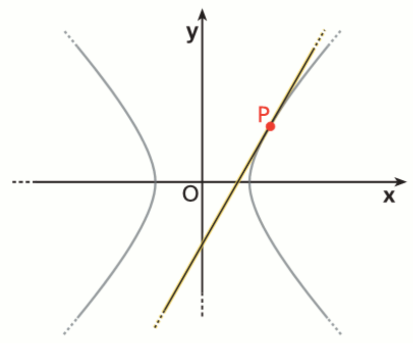
Si scrive l'equazione del fascio proprio di rette con sostegno nel punto $P(x_0; y_0)$, $y - y_0 = m(x - x_0)$, si considera il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'iperbole. Si ricava l'equazione di 2° grado risolvente il sistema e si impone la condizione di tangenza $(\boldsymbol{\Delta} = 0)$. Si risolve l'equazione di secondo grado rispetto ad m.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

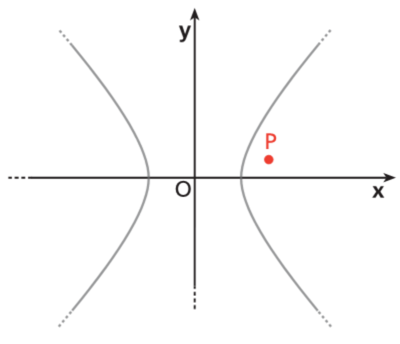
Se $m_1 \neq m_2 \rightarrow$ P esterno, due tangenti
Se $m_1 = m_2 \rightarrow$ P appartiene, una tangente
Se $m_1, m_2 \notin \Re \rightarrow$ P interno, non esistono tangenti



Due rette tangenti
(P $\notin$ iperbole)



Una sola retta tangente
(P□iperbole)



Nessuna retta tangente
(P $\notin$ iperbole)

1° caso: *Il punto non appartiene all' iperbole*

A. <u>Il punto è ***esterno*** all' iperbole</u> $\Rightarrow$ <u>le rette tangenti sono due</u>
Se il punto P è esterno si ottengono due valori distinti di m che, sostituiti nell'equazione del fascio di rette, consentono di determinare le equazioni delle due rette tangenti (se il punto P ha la stessa ascissa di un vertice dell'iperbole appartenente all'asse x, si ottiene un solo valore di m, poiché l'altro tende all'infinito).

B. <u>Il punto ***appartiene a un asintoto*** dell' iperbole</u> $\Rightarrow$ <u>le rette tangenti sono due</u>
Se il punto P appartiene a un suo asintoto, una delle tangenti coincide con l'asintoto stesso.

C. <u>Il punto è ***interno*** all'iperbole</u> $\Rightarrow$ <u>non esistono rette tangenti</u>

2° caso: *Il punto appartiene all'iperbole* $\Rightarrow$ <u>la retta tangente è una sola</u>

I metodo: Se il punto P appartiene all'iperbole, si ottiene un solo valore di m (due valori coincidenti) che, sostituito nell'equazione del fascio, consente di determinare l'equazione della retta tangente.

II metodo: Si applica la formula dello sdoppiamento:

a) $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = \pm 1$ per l'iperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$

b) $xx_0 - yy_0 = \pm a^2$ per l'iperbole $x^2 - y^2 = \pm a^2$

c) $xy_0 - yx_0 - 2k = 0$ per l'iperbole equilatera riferita agli asintoti $xy = k$

[*Le formule si ottengono dall'equazione canonica dell'iperbole sostituendo il termine* x^2 *con* xx_0 *e il termine* y^2 *con* yy_0].

Trovare l'equazione dell'iperbole che soddisfa delle condizioni

In generale per trovare l'equazione di una iperbole è necessario:

- avere due condizioni (scelte tra: fuoco, semiassi, passaggio per un punto, eccentricità, retta tangente)
- trasformare ogni condizione in una equazione
- ottenere il sistema delle due equazioni nelle incognite a^2 e b^2
- risolvere il sistema e trovare i valori di a^2 e b^2
- sostituire i valori ottenuti nell'equazione dell'iperbole, ottenendo l'equazione cercata.

1. Equazione dell'iperbole noti i fuochi ed il semiasse trasverso

– Si applica la definizione di iperbole e si calcolano le due distanze $\overline{PF}_1$ e $\overline{PF}_2$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

– Si elevano al quadrato entrambi i membri

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2$$

– Si sviluppano i calcoli e si isola il radicale rimasto
– Si elevano di nuovo al quadrato entrambi i membri
– Si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'iperbole in forma non canonica

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

2. Equazione dell'iperbole passante per due punti A e B

– Nell'equazione dell'iperbole in forma canonica si effettua la sostituzione

$$\frac{1}{a^2} = \alpha \quad \text{e} \quad \frac{1}{b^2} = \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha x^2 - \beta y^2 = 1$$

– Si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione precedente

$$\alpha {x_1}^2 - \beta {y_1}^2 = 1 \qquad \textit{passaggio per A}$$
$$\alpha {x_2}^2 - \beta {y_2}^2 = 1 \qquad \textit{passaggio per B}$$

– Si risolve il sistema di primo grado nelle incognite □ e β

$$\begin{cases} \alpha {x_1}^2 - \beta {y_1}^2 = 1 \\ \alpha {x_2}^2 - \beta {y_2}^2 = 1 \end{cases}$$

– Si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione iniziale ottenendo così l'equazione richiesta.