RICERCA DEI MASSIMI, DEI MINIMI E DEI FLESSI ORIZZONTALI

Ricordiamo …

→ **Condizione sufficiente per l'esistenza di un estremo**

Sia f(x) una funzione continua nel punto c e derivabile in un intorno I di c, eccettuato al più il punto c stesso.

- *Se per x ∈ I si ha che x < c →* $f'(x) < 0$ *e x > c →* $f'(x) > 0$ *allora c è un punto di minimo relativo di f.*
- *Se per x ∈ I si ha che x < c →* $f'(x) > 0$ *e x > c →* $f'(x) < 0$ *allora c è un punto di massimo relativo di f.*
- *Se il segno della derivata prima è lo stesso per ogni x ≠ c dell'intorno, allora c non è un punto estremante.*

Se la derivata di $f(x)$ assume segni costanti, ma discordi, rispettivamente in un intorno sinistro e in un intorno destro di c, si usa dire che $f(x)$cambia segno attraversando c o, semplicemente, che cambia segno in c.
Ciò premesso, il teorema si può così riformulare:

Se $f(x)$ *è continua in c e la sua derivata cambia segno attraversando c, allora c è un punto di estremo relativo di f.*

IL METODO DELLA DERIVATA PRIMA

❖ RICERCA DI MASSIMI E DI MINIMI RELATIVI DI UNA FUNZIONE $f(x)$ DERIVABILE

Per ricercare i minimi e i massimi relativi di una funzione è necessario studiare il segno della sua derivata, determinando gli intervalli in cui essa è negativa e quelli in cui è positiva, ma è importante considerare anche i punti in cui la derivata si annulla.
Bisogna ricordare anche di prendere in esame i valori che la funzione assume negli eventuali estremi di tali intervalli e negli eventuali punti di discontinuità.
Quindi:

1. si calcola $f'(x)$ e x ne determina il dominio;
2. si trovano i punti stazionari di $f(x)$ risolvendo $f'(x) = 0$;
3. si studia il segno di $f'(x)$ per determinare i punti di massimo e di minimo.

Osservazioni

- Una funzione derivabile può avere in x=c un punto di massimo o di minimo relativo senza essere monotòna in un intorno di c.
- Una funzione può avere un massimo o un minimo relativo anche in un punto in cui non è derivabile.

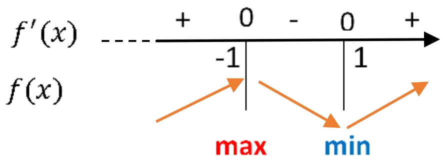
Esempio 1

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 3x$.
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

e studiamo il suo segno:

$$3x^2 - 3 > 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) > 0 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1$$



In $x = -1$ si ha un max relativo e in $x = 1$ si ha un minimo relativo.
I corrispondenti valori della funzione sono:

$$f(-1) = 2$$
$$f(1) = -2$$

I punti $M(-1;\ 2)$ e $m(1;\ -2)$ sono, rispettivamente un punto di massimo relativo e uno di minimo relativo del grafico della funzione.

Esempio 2

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, continua e derivabile in $\mathbb{R}$.
Si ha

$$f'(x) = x^2 - 1$$

ed è

$$f'(x) < 0 \longrightarrow x^2 - 1 < 0 \longrightarrow -1 < x < 1$$
$$f'(x) = 0 \longrightarrow x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = -1 \ \vee \ x = 1$$
$$f'(x) > 0 \longrightarrow x^2 - 1 > 0 \longrightarrow x < -1 \ \vee \ x > 1$$

Rappresentiamo questi risultati in uno schema grafico come il seguente (FIGURA 1).

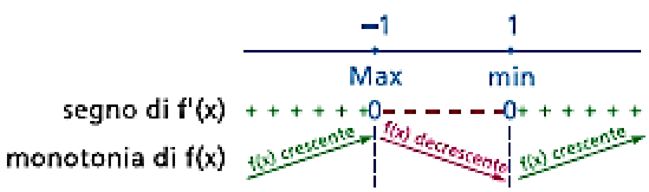


FIGURA 1

Possiamo perciò affermare che

$x = -1$ è un punto di massimo relativo
$x = 1$ è un punto di minimo relativo

Il grafico di $f(x)$ è in FIGURA 2.

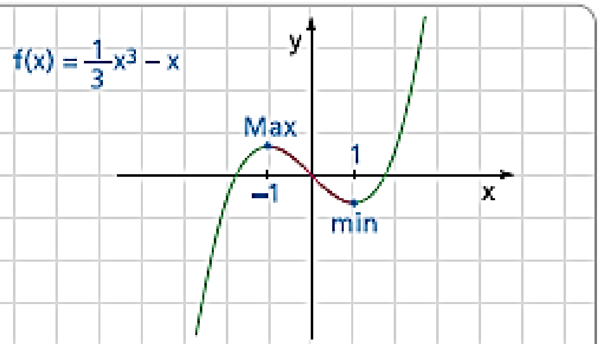


FIGURA 2

❖ RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI <u>ASSOLUTI</u> DI $\boldsymbol{f(x)}$ IN $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$

Occorre confrontare i massimi e i minimi relativi nell'intervallo $[a;b]$ con i valori $f(a)$ e $f(b)$.
Per determinare i minimi e i massimi assoluti, occorre tener presente che, per il teorema di Weierstrass, la loro esistenza è garantita in un intervallo chiuso e limitato in cui la funzione sia continua e che essi sono a maggior ragione anche minimi e massimi relativi e quindi vanno ricercati tra questi e precisamente:

- il punto di minimo assoluto è, tra i punti di minimo relativo, quello in cui la funzione assume il valore minore;
- il punto di massimo assoluto è, tra i punti di massimo relativo, quello in cui la funzione assume il valore maggiore.

Se invece non sono soddisfatte le condizioni richieste dal teorema di Weierstrass (l'intervallo non è chiuso e limitato), massimo e minimo assoluto possono non esistere.

❖ RICERCA DEI FLESSI ORIZZONTALI

Per ricercare i flessi a tangente orizzontale, occorre:

1. calcolare la derivata prima della funzione e uguagliarla a 0 , $f'(x)=0$
2. studiare il segno della derivata prima

Se il segno della derivata prima è lo stesso per ogni $x \neq c$ dell'intorno, allora il punto c è un punto di flesso orizzontale.

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x)=3x^5+1$.
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x)=15x^4$$

e studiamo il suo segno:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 15x^4=0 \Rightarrow x=0$$

$$f'(x)>0 \Rightarrow 15x^4>0 \Rightarrow \forall x \neq 0$$

Poiché sia per x<0 sia per x>0 si ha $f'(x)>0$, la funzione è crescente e, dal momento che per x=0 la $f'(x)=0$, il punto di ascissa x=0 è un punto di flesso orizzontale.

IL METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

❖ METODO DELLA DERIVATA SECONDA PER LA DETERMINAZIONE DEGLI ESTREMI RELATIVI

Un altro criterio sufficiente per la determinazione degli estremi relativi di una funzione derivabile è che la funzione sia due volte derivabile con continuità.

TEOREMA DERIVATA SECONDA ED ESTREMI RELATIVI

Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte con continuità in un intorno completo del punto c.

1 Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, il punto c è un punto di minimo relativo (**FIGURA 32**).

2 Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, il punto c è un punto di massimo relativo.

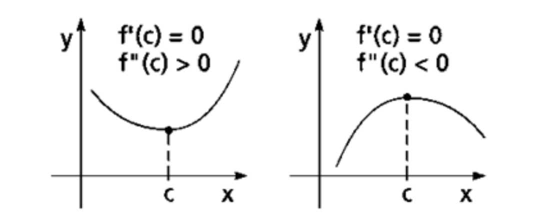


FIGURA 32

Per applicare questo teorema alla ricerca degli estremi relativi di una funzione f occorre:
1. determinare $f'(x)$ e $f''(x)$;
2. ricercare i punti stazionari di f risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$;
3. calcolare il valore di $f''(x)$ in tali punti.

Esempio

Determinare i punti di estremo relativo e assoluto della funzione $f(x) = x^3 - 6x^2$.

1 Si ha $f'(x) = 3x^2 - 12x$ e $f''(x) = 6x - 12$.

2 Risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x = 0 \quad \longrightarrow \quad 3x(x-4) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 4$$

3 Calcoliamo $f''(0) = -12$ e $f''(4) = 12$.

Concludiamo che:

- $x = 0$ è un punto di massimo relativo, essendo $f'(0) = 0$ e $f''(0) < 0$;
- $x = 4$ è un punto di minimo relativo, essendo $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$.

Nei punti in cui, oltre alla derivata prima, si annulla anche la derivata seconda, il teorema non ci permette di stabilire se vi è o meno un estremo relativo e se questo è un minimo o un massimo.
In questo caso si potrà applicare il metodo delle derivate successive.

❖ RICERCA DEI PUNTI DI FLESSO MEDIANTE LO STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

Ricordiamo …

→ **Condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di un flesso in un punto**

Sia data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$ e in tale intervallo esistano le sue derivate prima e seconda. Se $f(x)$ ha un flesso nel punto c, interno ad $[a; b]$, la derivata della funzione in quel punto si annulla, cioè $f''(x) = 0$.

Per trovare i punti di flesso possiamo studiare il segno della derivata seconda.

Se per ogni x$\neq c$ si ha:
$f''(x) > 0$ per $x < c$ e $f''(x) < 0$ per $x > c$ oppure $f''(x) < 0$ per $x < c$ e $f''(x) > 0$ per $x > c$
allora c è un punto di flesso.

Esempio

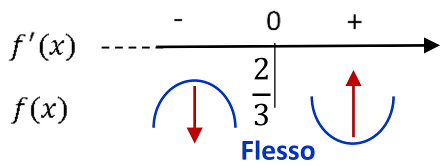
Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
Calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

e studiamo il suo segno di $f''(x)$:

$$6x - 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$



Per $x < \frac{2}{3}$ la concavità è rivolta verso il basso, per $x > \frac{2}{3}$ la concavità è rivolta verso l'alto, per $x = \frac{2}{3}$
La funzione ha un punto di flesso ascendente e poiché $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{3} \neq 0$
il flesso è obliquo.

❖ METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE PER LA DETERMINAZIONE DEGLI ESTREMI RELATIVI

TEOREMA DERIVATE SUCCESSIVE E PUNTI STAZIONARI

Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte con continuità in un intorno completo del punto c, e sia

$$f'(c) = 0 \qquad f''(c) = 0 \qquad \ldots \qquad f^{(n-1)}(c) = 0 \qquad f^{(n)}(c) \neq 0$$

1 Se n è **pari** allora c è un punto di estremo relativo e precisamente è un punto di minimo se $f^{(n)}(c) > 0$ e un punto di massimo se $f^{(n)}(c) < 0$.

2 Se n è **dispari** allora c è un punto di flesso a tangente orizzontale e precisamente è un flesso ascendente se $f^{(n)}(c) > 0$ e un flesso discendente se $f^{(n)}(c) < 0$.

Per applicare questo teorema alla ricerca degli estremi relativi di una funzione f occorre:
1. determinare$f'(x)$;
2. ricercare i punti stazionari di f risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$;
3. determinare l'espressione delle derivate successive alla prima e calcolarne il valore in ciascun punto stazionario fino a trovare la prima, tra le derivate successive, che non si annulla.

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2$
Il dominio della funzione è l'insieme $\mathcal{R}$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x = 4x(x^2 - 2x + 1) = 4x(x-1)^2$$

Poniamo $f'(x) = 0 \to 4x(x-1)^2 = 0 \to x_1 = 0, x_2 = 1$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 4(x-1)^2 + 4x \cdot 2(x-1) = 4(x-1)(x-1+2x) = 4(x-1)(3x-1)$$

Calcoliamo la derivata seconda in x_1 e x_2:

- Per $x_1 = 0 \Rightarrow f''(0) = 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4$
  Poiché $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, in $x_1 = 0$ si ha un ***minimo***.
- Per $x_2 = 1 \Rightarrow f''(1) = 4 \cdot (0) \cdot (2) = 0$
  Poiché $f''(1) = 0 \Rightarrow f'''(x) = 4(3x-1) + 4(x-1) \cdot 3 = 12x - 4 + 12x - 12 = 24x - 16$

Calcoliamo la derivata terza in $x_2 = 1$:
$f'''(1) = 24 - 16 = 8$
Poiché $f'(1) = 0$ e $f''(1) = 0$, $f'''(1) \neq 0$, in $x_2 = 1$ si ha un ***flesso orizzontale***.