Funzioni primitive di una funzione

Problema inverso a quello della ricerca della funzione derivata di una funzione assegnata è il seguente: ***data una funzione* f (x), *in un intervallo* [a, b] *trovare un'altra funzione* F(x) *che, in [a, b], abbia per derivata* f(x)**.
In altre parole, dovremo trovare una funzione f(x) tale che risulti:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Se tali funzioni **F(x)** esistono diremo che esse sono le **funzioni primitive** di f(x).

Esempio
$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x = x = f(x)$ quindi F(x) è una primitiva di f(x)=x

TEOREMA
Se una funzione f (x) ammette una funzione primitiva F(x), allora ne ammette infinite, date da

$$\boxed{F(x) + c}$$

dove c è una costante arbitraria.

Dimostrazione
Se F(x) è una primitiva di f (x) $\Rightarrow$ $\mathbf{F'(x) = f(x)}$ (1)
Consideriamo la funzione F(x) + c, poiché risulta $\mathbf{D[F(x) + c] = F'(x)}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{F(x)+c}$ è anch'essa una primitiva di f(x), qualunque sia la costante c.
Viceversa, considerata un'altra funzione primitiva Φ(x), dovrà risultare Φ'(x) =f(x); dal confronto con la (1) $\Rightarrow$ $\mathbf{\Phi'(x) = F'(x)}$
e, poiché due funzioni che hanno la stessa derivata differiscono per una costante, si ha:

$$\mathbf{\Phi(x) = F(x) + c}$$

Osservazione
Poiché tutte le primitive F(x) + c di una funzione differiscono per una costante, geometricamente esse costituiscono una famiglia di infinite curve piane, tante quanti sono i valori della costante reale c. Si può passare da una curva all'altra con la traslazione:

$$\begin{cases} \mathbf{x' \to x} \\ \mathbf{y' \to y - c} \end{cases}$$

Integrali indefiniti

La totalità delle primitive (o insieme delle primitive) di una data funzione f(x) si chiama ***integrale indefinito*** (o la più generale primitiva) di f(x) e si indica con la scrittura

$$\int f(x)\,dx$$

Il simbolo $\int$ è detto simbolo di integrazione, f(x) è la funzione integranda e dx indica la variabile rispetto alla quale si cercano le primitive.

Se F(x) è una primitiva di f(x), si scrive: $\boxed{\int f(x)dx = \{F(x) + c\,,\ \ c \in \Re\}}$

Per definizione è: $\boxed{D\int f(x)dx = F'(x) = f(x)}$

quindi: *l'operazione di integrazione indefinita è l'operazione inversa della operazione di derivazione.*

Tuttavia bisogna ricordare che se una funzione F(x) ammette in [a, b] una derivata, questa è unica, mentre se una funzione f(x) ammette una primitiva, essa ne ammette infinite, definite a meno di una costante.

Inoltre è: $\boxed{d\int f(x)dx = f(x)dx}$

TEOREMA

Ogni funzione f(x) continua in [a, b] ammette in [a, b] una funzione primitiva (e quindi infinite).

OSSERVAZIONE

Non tutte le funzioni continue sono derivabili ma sono tutte integrabili.

Proprietà degli integrali indefiniti

Si ricavano da quelle delle derivate

1) Un fattore costante può essere portato fuori dal segno di integrale.
Se k è una costante, si ha:

$$\boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}$$

2) L'integrale indefinito di una somma di funzioni continue è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni:

$$\boxed{\int [f(x) + g(x) + h(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + \int h(x)dx}$$

Questa proprietà esprime la cosiddetta *regola di integrazione per scomposizione*.

3) Se k_1, k_2 sono delle costanti e $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono funzioni continue, risulta:

$$\boxed{\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1\int f_1(x) + k_2\int f_2(x)dx}$$

Quindi l'operatore integrale indefinito è un operatore lineare.

E' bene osservare che: $\int [f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

Integrali immediati

La relazione $\mathbf{D\int f(x)dx = F'(x) = f(x)}$ che deriva direttamente dalla definizione di integrale indefinito, consente di ottenere immediatamente l'integrale indefinito di alcune funzioni.
Dalla tabella delle derivate fondamentali discende quella degli integrali indefiniti immediati.

Tabella delle primitive di alcune funzioni			
1.	$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c \quad , \ (n \neq -1)$ In particolare: $\int dx=x+c$ $\int xdx=\frac{1}{2}x^2+c$ $\int \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c$ $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$	4. 5. 6. 7. 8. 9.	$\int \cos x dx=\operatorname{sen} x+c$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+c$ $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x+c$ $\int e^x dx=e^x+c$ $\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+c$ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\operatorname{arcsen} x+c$
2.	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$	10.	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg} x+c$
3.	$\int \operatorname{sen} x dx=-\cos x+c$		

La tabella può essere generalizzata sostituendo alla variabile indipendente x una qualunque funzione continua f(x). In tal caso, però, al posto del differenziale della variabile indipendente dx si dovrà sostituire il differenziale df(x) =f'(x)dx. Si ottiene così la seguente tabella.

Tabella delle primitive di alcune funzioni composte			
1.	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	6.	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
2.	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \qquad (\text{con } n \neq -1)$	7.	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
3.	$\int f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x)dx = -\cos f(x) + c$	8.	$\int f'(x) \cdot \cos f(x)dx = \operatorname{sen} f(x) + c$
4.	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c$	9.	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \operatorname{tg} f(x) + c$
5.	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$	10.	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$