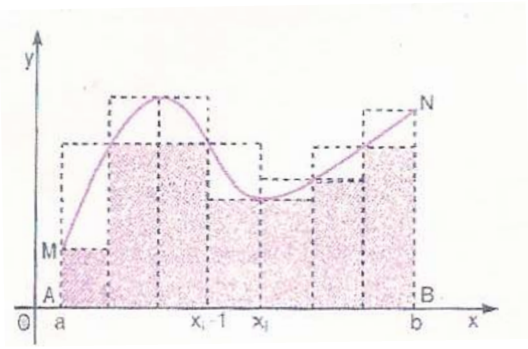
IL PROBLEMA DELLE AREE

Il problema delle aree è uno dei più antichi problemi della matematica e certamente anche uno dei più importanti, se si tiene conto che esso è alla base del ***calcolo integrale***.
Nei tempi più remoti della storia dell'uomo si pensava che l'area di una figura piana dipendesse dal perimetro della stessa figura.
Già intorno al 2000 a.C. si conoscevano regole e procedimenti per la determinazione dell'area dei poligoni più semplici, come i rettangoli, i quadrati, i triangoli.
Successivamente, all'epoca di Euclide (300 a.C.), il problema delle aree dei poligoni, insieme a numerosi altri concetti e conoscenze di aritmetica e di geometria, ebbe una sistemazione teorica rigorosa.
Una volta definita l'area di un quadrato Q, rispetto a un quadrato unitario U, il calcolo dell'area di un qualunque poligono era ricondotto al calcolo dell'area del quadrato equivalente, cioè del quadrato equiscomponibile con il poligono.
Il problema di trovare l'area di figure piane limitate da linee curve, incontrò maggiori difficoltà perché era impossibile, con i metodi elementari, riuscire a trasformare una figura piana con contorno curvilineo in un quadrato equivalente.
I greci si resero conto subito che non si poteva ricondurre il concetto di area del cerchio a quello di area di un quadrato.
Il problema fu affrontato in modo rigoroso e organico da Archimede.
Archimede, mediante il ***metodo di esaustione***, trovò che l'area del cerchio di raggio r era compresa tra $\left(3+\frac{10}{71}\right)r^2$ e $\left(3+\frac{10}{70}\right)r^2$ ma non riuscì a trovare *esattamente* l'area del cerchio.
Soltanto nell'Ottocento, con la costruzione rigorosa dell'insieme dei numeri reali e l'introduzione dell'assioma della continuità, è stato possibile raggiungere delle conclusioni definitive sul problema della quadratura del cerchio.
Archimede si servì del metodo di esaustione anche per il calcolo dell'area del segmento parabolico, dell'area della superficie e del volume di alcuni solidi di rotazione.
Ma il metodo di esaustione non permetteva di calcolare il valore esatto dell'area delle figure considerate, per cui nacque l'esigenza di trovare un procedimento generale che potesse definire e determinare l'area delle superfici piane limitate da contorni curvilinei qualsiasi $\Rightarrow$ ***Il calcolo degli integrali definiti***

Integrale definito

- Sia y = f(x) l'equazione di una funzione continua e positiva nell'intervallo [a, b].

Il diagramma della funzione sarà allora un arco di curva MN situato sopra l'asse delle ascisse.
La porzione di piano delimitata da tale arco, dall'asse x e dalle rette parallele all'asse y e passanti per gli estremi dell'intervallo [a, b], è un quadrilatero mistilineo chiamato ***trapezoide.***



Per valutare la misura dell'area del trapezoide MNBA dividiamo l'intervallo [a, b] in un certo numero n di parti uguali, di ampiezza
Dai punti di suddivisione conduciamo le parallele all'asse y fino ad incontrare l'arco MN in altrettanti punti.
Da questi punti conduciamo, infine, delle rette parallele all'asse x in modo da formare dei rettangoli.
Per valutare la misura dell'area del trapezoide MNBA dividiamo l'intervallo [a, b] in un certo numero n di parti uguali, di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
Dai punti di suddivisione conduciamo le parallele all'asse y fino ad incontrare l'arco MN in altrettanti punti.
Da questi punti conduciamo, infine, delle rette parallele all'asse x in modo da formare dei rettangoli.
Indichiamo con $m_1, m_2, \dots, m_n$ i minimi valori assunti dalla f(x) rispettivamente nel 1°, 2°, … ,n° intervallino e con $M_1, M_2, \dots, M_n$, i massimi valori assunti dalla f(x) nei medesimi intervallini.

- L'insieme degli n rettangoli aventi per basi gli intervallini in cui è stato suddiviso l'intervallo [a, b] e altezze mi, i minimi valori assunti da f(x), viene chiamato ***plurirettangolo inscritto*** e la sua area risulta: $\mathbf{s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x + \dots + m_n\Delta x}$
- L'insieme degli n rettangoli aventi per basi gli intervallini in cui è stato suddiviso l'intervallo [a, b] e altezze M_i, i massimi valori assunti da f(x), viene chiamato ***plurirettangolo circoscritto*** e la sua area risulta: $\mathbf{S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + \dots + M_n\Delta x}$

Qualunque sia il valore di n, risulta $\mathbf{s_n \le S_n}$
Al variare di n le aree dei due plurirettangoli varieranno ed avremo perciò valori diversi di s_n ed S_n; tali valori costituiscono rispettivamente un'*approssimazione per difetto* ed un'*approssimazione per eccesso* del valore dell'area S del trapezoide MNBA
Quindi, qualunque sia n, sarà sempre $\mathbf{s_n < S < S_n}$.
Facendo crescere indefinitamente il numero n delle suddivisioni dell'intervallo [a, b] in modo che tenda a zero l'ampiezza di ciascuno degli intervalli parziali, le due successioni s_n e S_n,tendono allo stesso limite: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = S}$

Al numero che rappresenta il limite comune delle due successioni si dà il nome di ***area del trapezoide MNBA.***
Tale limite comune si definisce anche come ***integrale definito della funzione f(x)*** relativa all'intervallo [a, b] e si denota con $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$

Quindi per definizione è: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx}$

L'integrale definito è un numero reale e pertanto, una volta considerata la funzione *f(x)* e l'intervallo [a; b] di integrazione non ha alcuna importanza il nome della variabile indipendente; potremo perciò scrivere :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(v)dv = \ldots$$

- Tutto quanto si è detto nell'ipotesi che la funzione continua *f(x)* sia positiva e crescente in [a, b], si può ripetere per f(x) positiva e decrescente, oppure per f(x) positiva in [a, b] senza altre restrizioni, purché si possa suddividere l'intervallo [a, b] in intervalli parziali in ciascuno dei quali la f(x) sia sempre crescente, o decrescente, o costante.
- Un'ulteriore estensione sì ha per la funzione f(x) negativa in [a, b], il che corrisponde all'ipotesi che il trapezoide sia tutto sotto l'asse delle x.

In questo caso si conviene di considerare negativa la misura dell'area di un trapezoide situato sotto l'asse delle x.

- Se infine in un intervallo [a, b] la funzione f(x) non ha sempre lo stesso segno, si divide l'intervallo [a, b] in intervalli parziali in ciascuno dei quali la f(x) non muti di segno.

In questo caso l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta la somma algebrica delle misure delle aree delle parti di piano che stanno sopra e di quelle che stanno sotto l'asse delle x.

Se si deve valutare un'area nel senso della geometria elementare, occorrerà determinare separatamente le aree delle parti di piano che stanno sopra l'asse x e quelle delle parti di piano che si trovano sotto l'asse x e sommare poi i valori assoluti delle loro misure oppure sarà sufficiente calcolare l'integrale: $\int_a^b |f(x)|dx$

Proprietà dell'integrale definito

P1. Se $a < b \quad \Rightarrow \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

P2. Se $a = b \quad \Rightarrow \quad \int_a^a f(x)dx = 0$

Teoremi

T1. Se f(x) è continua in I e a, b, c $\in$ I, si ha: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$

T2. Se $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ sono continua in [a, b], si ha:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx}$$

T3. Se k è una costante ed f(x) è continua in [a, b], si ha: $\boxed{\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx}$

T4. Teorema della media

L'integrale definito di una funzione continua f(x) è uguale all'ampiezza dell'intervallo d'integrazione, moltiplicata per il valore che la funzione integranda assume in un conveniente punto di questo intervallo; cioè:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_1)}$$

dove x_1 indica un conveniente punto dell'intervallo [a, b].

DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con m ed M rispettivamente il minimo ed il massimo assoluto della f(x) in [a, b]. Diviso [a, b] in n parti eguali e detto m_i il minimo valore della f(x) nell'i^{mo} intervallino $[x_{i-1}, x_i]$, si ha:

$$m \le m_i \le M$$

e, detta $h = \dfrac{b-a}{n}$ l'ampiezza comune dei singoli intervallini, $\Rightarrow mh \le m_i h \le Mh$

Ponendo i = 1, 2. 3, .., n $\Rightarrow mh \le m_1 h \le Mh \;\; ; mh \le m_2 h \le Mh \; ; \;\; \ldots \;\; ; mh \le m_n h \le Mh$

Sommando:

- i primi membri delle n diseguaglianze soprascritte $\Rightarrow mh \cdot n = m\dfrac{b-a}{n}n = m(b-a)$,
- i terzi membri $\Rightarrow M(b-a)$,
- i secondi membri $\Rightarrow m(b-a) \le s_n \le M(b-a)$

Passando al limite per $n \to +\infty$, risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Di qui si vede che l' $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ è compreso fra i due prodotti che si ottengono moltiplicando l'ampiezza (b-a) dell'intervallo [a, b], rispettivamente, per i numeri m ed M.

Esiste perciò certamente un numero k, compreso fra m ed M tale che sia:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b-a)k}$$

D'altra parte, essendo $f(x)$ continua in [a, b], esiste sempre un punto x_1 dell'intervallo [a, b], in cui risulta: $f(x_1)$ = k; quindi: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_1)}$

c.d.d.

Interpretazione geometrica

Da un punto di vista geometrico, il teorema esprime il fatto che esiste almeno un numero c, interno all'intervallo [a, b] tale che il rettangolo la cui base misura b-a e la cui altezza misura |f(c)| ha superficie sottesa dal grafico della funzione.
Il numero **f(c)** rappresenta il ***valore medio*** che ha la funzione nell'intervallo, nel senso che, se essa assumesse costantemente il valore f(c), avrebbe lo stesso integrale definito in [a, b].

Funzioni integrali

Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo [a, b] ed x un punto variabile in [a, b].

Consideriamo l'integrale: $\boxed{\int_a^x f(t)dt}$ (1)

dove t indica la variabile d'integrazione (è stata indicata con t per distinguerla dalla variabile indipendente x).

Questo integrale è una funzione del suo estremo superiore x, cioè ad ogni valore della x, dell'intervallo [a, b], corrisponde uno ed un solo valore per l'integrale (1).
Esso quindi rappresenta una funzione F(x), del suo estremo superiore x, definita in [a, b].

Si può perciò scrivere: $\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)dt}$

La ***F(x)*** *si* chiama **funzione integrale** mentre la ***f(x)*** si chiama *funzione integranda*.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

(TEOREMA DI TORRICELLI – BARROW)

Se la funzione integrando $f(x)$ è continua, esiste la derivata della funzione integrale F(x):

$$\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)dt} \quad (2)$$

nel punto x, ed è uguale al valore che la funzione integrando assume nello stesso punto, cioè:

$$F'(x)=f(x)$$

DIMOSTRAZIONE.

Infatti, si osservi innanzi tutto che l'incremento della *F(x)* relativo al punto x ed all'incremento *h*, è: $F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$

ossia, in base al teorema T_1, :

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^{x+h} f(t)dt$$

Applicando a quest'ultimo integrale il teorema della media, si ha:

$$F(x+h)-F(x)=h\cdot f(x_1)$$

ove x_1 è un conveniente punto dell'intervallo [x, x + h].

Segue quindi:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x_1)$$

Se, tenuto fisso x, si fa tendere *h* a zero, il valore x_1, compreso fra x e x + *h,* tende ad x. Inoltre, essendo la *f(x)* continua, risulta:

$$\lim_{h\to 0} f(x_1)=\lim_{x_1\to x} f(x_1)=f(x)$$

e perciò si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

e quindi :

$$F'(x)=f(x)$$

c.d.d.

Formula di NEWTON – LEIBNIZ

Il teorema dimostrato ci permette di *calcolare l'integrale definito di una funzione per mezzo dell'integrale indefinito della funzione stessa*.
Infatti, se $\varphi(x)$ è una qualsiasi primitiva di f(x), abbiamo:

$$\varphi'(x) = f(x)$$

e siccome abbiamo dimostrato che risulta anche:

$$F'(x) = f(x),$$

possiamo senz'altro affermare che le due funzioni *$\varphi(x)$ e $F(x)$ differiscono per una costante k.*
Possiamo quindi scrivere:

$\varphi(x) = F(x) + k$ e per la (2) si ha: $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt + k$

Se in quest'ultima formula si pone x = a, e si ricorda che è $\int_a^a f(t)dt = 0$, si ottiene φ (a) = k,

cosicché si ha: $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt + \varphi(a) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = \varphi(x) - \varphi(a)$

ed in particolare, per x = b:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)}$$

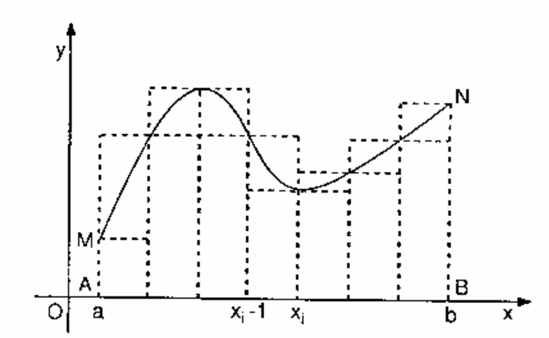
Abbiamo così la **REGOLA:**

Calcolata una primitiva qualunque $\varphi(x)$ della funzione f (x), l'integrale definito tra a e b della f (x) è dato dalla differenza dei valori assunti da $\varphi(x)$, rispettivamente, nell'estremo superiore b e nell'estremo inferiore a dell'integrale

La differenza $\varphi(b) - \varphi(a)$ si indica spesso con la scrittura: $[\varphi(x)]_a^b$, o anche:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = [\varphi(x)]_a^b}$$

Significato geometrico dell'integrale definito. Calcolo di are

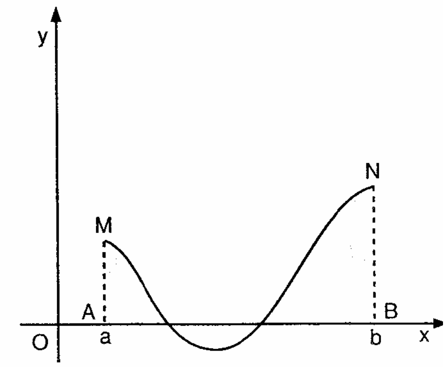


Abbiamo visto che *se la funzione f (x) è* ***continua e non negativa*** *in [a, b], il valore dell'integrale:*

$$\int_a^b f(x)dx$$

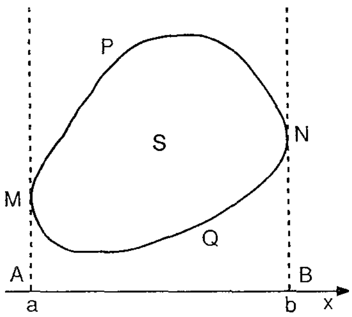
rappresenta l'area del trapezoide ABNM delimitato dalla curva di equazione y = f(x), dall'asse x e dalle parallele AM e BN all'asse y.

1. Se la curva di equazione y = f(x) attraversa l'asse x in uno o più punti (in numero finito),



il trapezoide si scompone in alcune porzioni situate al di sopra dell'asse x ed in altre situate al di sotto*;* l'integrale dà allora la somma delle aree poste al di sopra dell'asse x, prese positivamente, più quella delle aree poste al di sotto dell'asse x, prese ***negativamente***.

2. L'integrale definito si presta però bene anche a determinare l'area di una superficie da una curva tale che ogni parallela all'asse y la incontri al più in due soli punti.



Infatti, indichiamo con $y=f_1(x)$ l'equazione dell'arco di curva MPN, e con $y=f_2(x)$l'equazione dell'arco di curva MQN.

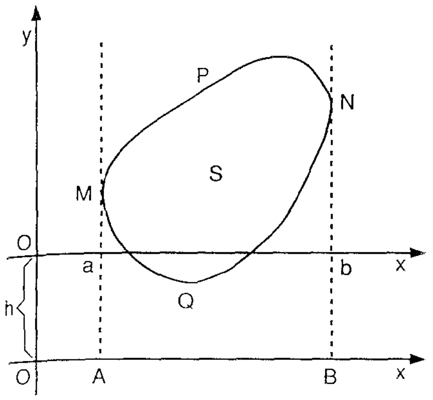
Se la superficie S è tutta al di sopra dell'asse x, le funzioni: $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono positive ed è $f_1(x) \geq f_2(x)$. La superficie S è la differenza dei trapezoidi ***AMPNB*** e ***AMQNB***.
Le aree di questi due trapezoidi sono date rispettivamente da:

$$\int_a^b f_1(x)dx, \quad \int_a^b f_2(x)dx$$

Quindi l'area di S è data da:

$$\boxed{area\ S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)dx]dx} \quad (1)$$

3.



Se la superficie S <u>non è tutta al di sopra dell'asse x</u>, possiamo trasportare l'origine delle coordinate lungo l'asse delle y verso il basso di un segmento h, in modo che la superficie S resti tutta al di sopra dell'asse x .
Rispetto a questo nuovo sistema d'assi, le equazioni degli archi di curva MPN e MQN sono rispettivamente: $f_1(x) + h$ e $f_2(x) + h$; quindi, dopo l'avvenuto trasporto dell'origine, l'area di S è data da:

$$\int_a^b \{[f_1(x)+h]-[f_2(x)+h]\}dx = \int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$$

E perciò anche prima del trasporto, l'area di S è data da:

$$\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$$

<u>In ogni caso</u> dunque l'area di S e data dalla formula $\boxed{area\ S = \int_a^b [f_1(x)-f_2(x)dx]dx}$