TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

A partire dai teoremi sui limiti e dalla definizione di continuità si può dimostrare la validità della proposizione seguente, riguardante l'insieme delle funzioni somma, differenza, prodotto e quoziente:

Se due funzioni* f(x) *e* g(x*), definite nello stesso insieme D, sono continue in un prefissato punto $x_0 \in$ D allora sono pure continue in x_0 le seguenti funzioni:

- somma (f + g) (x) = f(x) + g(x)
- differenza (f - g) (x) =f (x) - g(x)
- prodotto (f $\cdot$ g) (x) = f(x) $\cdot$ g(x)
- quoziente (f/g) (x) = $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (purché g (x_o) $\neq 0$)

Continuità delle funzioni elementari

Sia attraverso il metodo diretto (il quale fa riferimento alla definizione di continuità) sia applicando la proposizione appena enunciata, si può dimostrare la continuità delle funzioni elementari indicate qui di seguito.

1) La funzione costante f(x) = k è continua in qualunque punto $x_0 \in$R.

2) La funzione identità f(x) = x è continua in ogni punto $x_0 \in$R.

3) La funzione potenza f(x) = k x^n (con k$\in R_0$ et n$\in N_0$) è continua in ogni punto
   $x_0 \in$R.

4) La funzione polinomiale f(x) = $a_o x^n + a_l x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$ è continua in qualunque punto $x_0 \in$R.

5) La funzione razionale fratta $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ dove A(x) e B(x) sono due polinomi

   nella variabile x, è continua in ogni punto $x_0 \in$R, purché tale valore non annulli il denominatore, cioè a condizione che sia B(x_o) $\neq 0$.

6) La funzione irrazionale $f(x) = \sqrt{x}$ è continua in tutti i punti x_0 appartenenti al suo dominio D = [0, + ∞[.

   7) Le funzioni goniometriche f(x) = sin(x) e g(x) = cos(x) sono continue in ogni punto x_0 dell'asse reale.

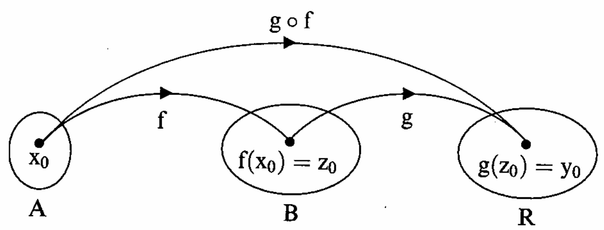
8) La funzione goniometrica f(x) = tg(x) è continua in ogni punto $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dell'asse reale.

9) La funzione esponenziale $f(x) = a^x$ (con $0 < a \neq 1$) continua in ogni punto x_0 dell'asse reale.

10) La funzione logaritmica $f(x) = \log_a(x)$, con $0 < a \neq 1$) è continua in ogni punto x_0 del suo dominio D =] 0, + ∞ [

Continuità delle funzioni composte

Siano date le due funzioni $f: A \to B$ e $g: B \to R$ con $A \subseteq R$, $B \subseteq R$.
Se f è continua in $x_0 \in A$ e g è continua in $f(x_0) \in B$ allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0.



Teorema

Sia $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ la funzione composta di f(x) e g(z). Se f(x) è continua in x_0 si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, e se g(z) è continua in $z_0 = f(x_0)$ si ha $\lim_{z \to z_o} g(z) = g(z_0)$, allora la funzione composta g[f(x)] è continua in x_0 e risulta

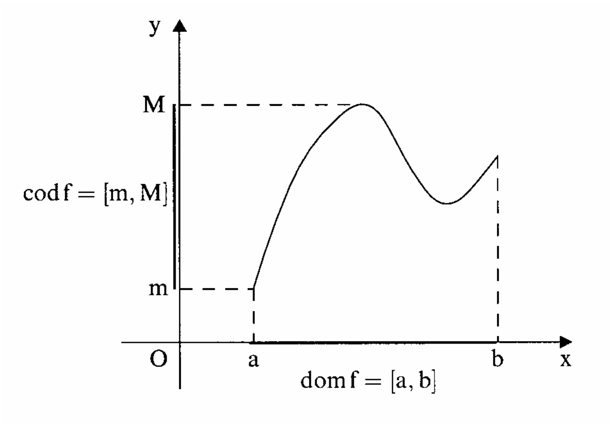
$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right] = g[f(x_0)]$$

Per le funzioni continue valgono alcuni importanti teoremi:

1. **Teorema di Weierstrass** (o di esistenza del massimo e del minimo)

Se **y=f(x)** è una **funzione continua** definita in un **intervallo chiuso** e **limitato** [a, b], allora essa ha un **massimo assoluto** ed un **minimo assoluto**.

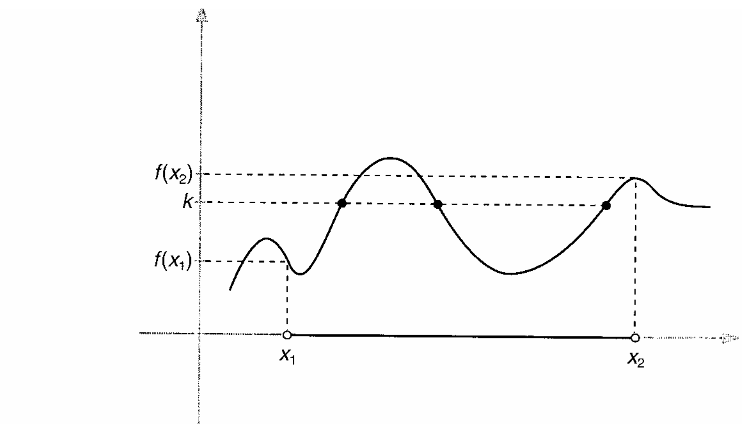
Questo teorema afferma che l'insieme delle immagini degli elementi $x \in [a, b]$ possiede massimo e minimo assoluti.



Nota:
- ✓ **M** è il **massimo assoluto** di f(x) in [a, b]se e solo se M è l'estremo superiore del condomino di f(x) (cioè $f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$) e M appartiene al condominio di f(x);
- ✓ **m** è il **minimo assoluto** di f(x) in [a, b]se e solo se m è l'estremo inferiore del condomino di f(x) (cioè $f(x) \geq m$, $\forall x \in [a, b]$) e m appartiene al condominio di f(x).
- ✓ Il teorema non è invertibile, perché **se f(x) ammette il massimo e il minimo assoluti in [a, b] non è detto che f(x) sia continua in [a, b]**.

2. **Teorema di Bolzano** (o dei valori intermedi)

Se **y=f(x)** è una funzione definita e continua in [a, b] e se x_1, x_2 sono due punti qualsiasi appartenenti all'intervallo [a, b], allora essa per $x \in [x_1, x_2]$ assume tutti i valori compresi fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$.



Come conseguenza del teorema di Bolzano si ha il seguente teorema:

3. Teorema dell'esistenza degli zeri

Se y=f(x) è una funzione **continua** in un intervallo chiuso [a, b] e se **f(a)** ed **f(b)** hanno **segno opposto**, allora **esiste almeno** un punto $x_0 \in\ ]a, b[$ tale che $\mathbf{f(x_0)=0}$.