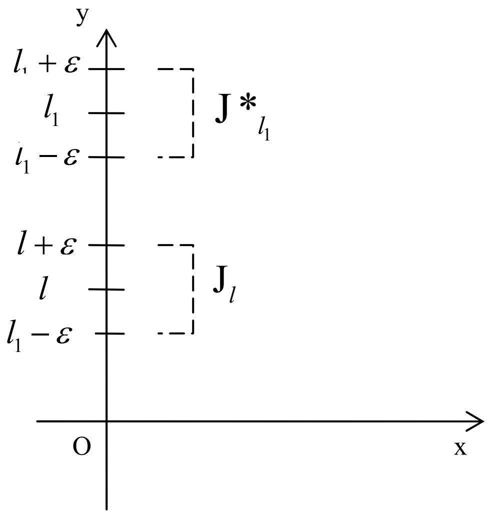
Teorema dell'unicità del limite

Se per $x \to x_0$ una funzione ammette limite finito, questo limite è unico.

Dimostrazione

Supponiamo che per $x \to x_0$ la funzione f(x) ammetta due limiti diversi, ossia che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ con $l_1 \neq l$ (ad es. $l_1 > l$).

Scegliamo ora due intorni, uno di l, J_l ed uno di l_1, $J^*_{l_1}$ tali che $J_l \cap J^*_{l_1} = \varnothing$ ossia in modo che non abbiano elementi in comune (ciò è possibile, basta considerare intorni aventi raggio $\varepsilon < \frac{l_1 - l}{2}$)



Per definizione di limite applicata al 1° limite, in corrispondenza di J_l esisterà in I_{x_0} tale che $\forall x (x \in I_{x_0} - \{x_0\} \cap D) \Rightarrow f(x) \in J_l$

Analogamente per definizione di limite applicata al 2° limite, in corrispondenza di $J^*_{l_1}$ esisterà un $I^*_{x_0}$ tale che $\forall x (x \in I_{x_0} - \{x_0\} \cap D) \Rightarrow f(x) \in J^*_{l_1}$

Preso ora l'intorno $H_{x_0} = I^*_{x_0} \cap I_{x_0}$, $\forall x (x \in H_{x_0} - \{x_0\} \cap D) \Rightarrow f(x) \in J_l$ ed $f(x) \in J^*_{l_1}$ assurdo in quanto $J_l \cap J^*_{l_1} = \varnothing$