Limite di una successione

Successioni

Esistono particolari funzioni reali di variabile reale, definite in N o in un suo sottoinsieme infinito , dette successioni, molto importanti nello studio dell'analisi matematica.

Definizione
*Chiameremo **successione numerica** (o semplicemente **successione**) una funzione* $f: N \to R$ *che ad ogni numero naturale dell'insieme di definizione fa corrispondere uno ed un solo numero reale.*

Gli **elementi** della successione si dicono **termini** della successione e si indicano con una lettera, sempre la stessa, munita di indice:

$$a_{o,}\ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Il numero a_n si chiama **termine n^{mo}** della successione o anche **termine generale della successione** e, in generale contiene la legge di formazione della successione.
La successione $a_{o,}\ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ può essere indicata anche con il simbolo $\{a_n\}$.

Una successione può essere determinata sostanzialmente in tre modi:
a) per enumerazione
Consiste nell'indicare, per ogni numero naturale, il corrispondente numero reale e quindi nell'elencare i primi elementi della successione

$$a_{o,}\ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Esempio: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
b) mediante una funzione
Consiste nell'individuare la successione definendo astrattamente la legge che ad ogni numero naturale fa corrispondere un numero a_n.
Esempio: $a_n = \frac{1}{n}$ definita per $n \in N_0$.
c) per ricorrenza
Consiste nel dare il 1° termine ed la legge che lega due termini consecutivi

$$\{a_n\} = \begin{cases} a_0 \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Esempio: $\begin{matrix} a_0 = -1 \\ a_{n+1} = -(a_n + 1)^n \end{matrix} \Rightarrow a_0 = -1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 0,\ a_4 = -1, \dots$

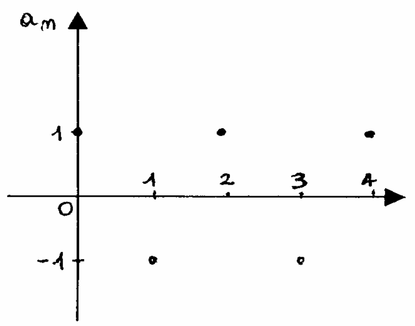
Essendo le successioni particolari funzioni, si possono dare, per esse, le varie definizioni date per le funzioni, lievemente modificate perché la variabile indipendente appartiene ad N e non ad R.
Inoltre, poiché gli elementi di una successione costituiscono un insieme numerico, si potranno dare le definizioni date per gli insiemi numerici.
Ad esempio:
Una successione si dice **crescente** se risulta $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in N$
Una successione si dice **decrescente** se risulta $a_n > a_{n+1}, \forall n \in N$

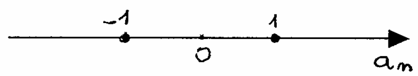
Una successione si dice **limitata superiormente** se esiste un numero reale k tale che $a_n < k$, $\forall n \in N$.
Analogamente si parlerà di successione **limitata inferiormente**, di successione **limitata**, di **estremo superiore**, **estremo inferiore**, **massimo** e **minimo** di una successione.

Rappresentazione grafica di una successione

E' possibile rappresentare le successioni nel piano cartesiano e il grafico sarà formato dai punti, isolati, di ascissa n e ordinata a_n.
Si può anche rappresentare la successione solo su una retta orientata sulla quale sia fissato un sistema di ascisse e il grafico sarà un insieme di punti.

Ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$, che ha per elementi +1, -1, +1, -1, +1, … , può essere così rappresentata:





Limite di una successione

Poiché le successioni sono delle particolari funzioni si può parlare di *limite di una successione*.
Da quanto detto sul grafico di una successione, risulta evidente che non ha senso considerare il limite di una successione per n tendente ad un valore finito, ma, essendo N illimitato superiormente, si può studiare il limite di una successione per n tendente a $+\infty$.

- Data la successione di numeri reali: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ si dice che essa ha per limite il numero *l*, per n $+\infty$, e si scrive: $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, quando in corrispondenza ad un qualsiasi numero positivo ε, è possibile determinare un numero positivo p, tale che per ogni n > p risulti:

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

- Data la successione di numeri reali:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

  si dice che essa ha per limite l'infinito (o più infinito, o meno infinito), per n $+\infty$, e si scrive, rispettivamente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

  quando in corrispondenza a un arbitrario numero positivo *k* è possibile determinare un numero positivo p, tale che per ogni n > p, risulti rispettivamente:

$$|a_n| > k, \; a_n > k, \; a_n < -k.$$

Un successione che ha per limite l si chiama **convergente**.
Un successione che ha per limite ∞, + ∞, - ∞ si chiama **divergente**.
Le successioni convergenti o divergenti si dicono anche **regolari**.
Se non esiste il $\lim_{n\to+\infty} a_n$, la successione si dice **irregolare** o **indeterminata** (non è convergente, né divergente).
Anche per le successioni valgono i **teoremi dell'unicità del limite**, **della permanenza del segno** e **del confronto**.
Date le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ restano determinate le successioni:

$$\{a_n + b_n\},\ \{a_n - b_n\},\ \{a_n \cdot b_n\},\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \text{ con } b_n \neq 0$$

Supposto che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano regolari, se è $\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = l_2$, valgono i seguenti teoremi:

- $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = l_1 + l_2$
- $\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = l_1 - l_2$
- $\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = l_1 \cdot l_2$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$ con $l_2 \neq 0$