INTERVALLI NELL'INSIEME R

Lo studio della ***topologia*** [1] (dal greco "*analysis situs*" ossia "*studio del luogo*") dell'insieme *R* è di fondamentale importanza per gli argomenti e i problemi di analisi infinitesimale.
Il "luogo" di cui vogliamo occuparci è l'insieme *R* dei numeri reali o quello dei punti di una retta orientata sulla quale sia stato fissato un sistema di ascisse.
Prenderemo in esame essenzialmente *sottoinsiemi di R* e tra questi, in particolare, gli *intervalli*.

• *Intervalli limitati*

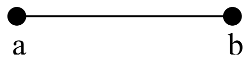
Definizione - *Dati due numeri reali* a *e* b*, con* a < b*, si chiama* ***intervallo limitato*** *di estremi* **a** *e* **b** *l'insieme di tutti i numeri reali* ***compresi*** *tra i numeri dati* a *e* b.
Il numero **a** viene detto **estremo inferiore**, **b estremo superiore** dell'intervallo.

- Se gli estremi **a** e **b appartengono** all'insieme allora esso è chiamato ***intervallo limitato chiuso***.

Simbolicamente, si scrive:

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$$

L'immagine grafica dell'intervallo chiuso di estremi a e b è rappresentata da un segmento comprensivo dei suoi estremi

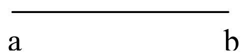


- Se gli estremi **a** e **b non appartengono** all'insieme allora esso è chiamato ***intervallo limitato aperto***.

Simbolicamente, si scrive:

$$]a, b[= \{x \in R \mid a < x < b\} \text{ oppure } (a, b)$$

L'immagine grafica dell'intervallo aperto è rappresentata da un segmento privo dei suoi estremi

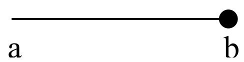


Se all'insieme appartiene uno solo degli estremi, a seconda che l'estremo escluso sia a oppure b, si hanno i due seguenti intervalli:

- **intervallo aperto a sinistra** e chiuso a destra:

$$]a, b] = \{x \in R \mid a < x \le b\} \text{ oppure } (a, b]$$

L'immagine grafica dell'intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra è rappresentata da un segmento comprensivo solo dell'estremo b



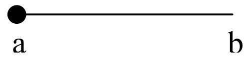
---

[1] La topologia ha come oggetto la ricerca di quelle particolari proprietà delle figure geometriche che si conservano anche quando tali figure sono sottoposte a deformazioni così profonde da perdere tutte le loro caratteristiche metriche e legate alla forma. I primi lavori intorno a queste originali idee geometriche furono realizzati dall'astronomo tedesco Johann Benedikt Listing (1808-1882); vale la pena dì ricordare il suo libro *Vorstudien zur Topologie*, pubblicato nel 1847 a Gottinga, nel quale egli introduce per la prima volta il termine *topologia*.

➢ **intervallo aperto a destra** e chiuso a sinistra:

$$[a, b[= \{x \in R \mid a \leq x < b\} \text{ oppure } [a, b)$$

L'immagine grafica dell'intervallo intervallo aperto a destra e chiuso a sinistra è rappresentata da un segmento comprensivo solo dell'estremo a:



La distanza degli estremi **d = b-a** si chiama **ampiezza** dell'intervallo [a, b].

La semisomma degli estremi $\mathbf{x_C} = \frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{2}}$ individua il **centro** dell'intervallo, rappresentato dal punto medio del segmento corrispondente e il numero

La distanza tra il centro e uno degli estremi $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{b - a}}{\mathbf{2}}$ è detta **raggio** dell'intervallo.

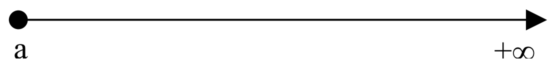
- ***Intervalli illimitati***

Definizione – Si chiama ***intervallo illimitato superiormente***, avente **a** come **estremo inferiore** e + ∞ (più infinito) come **estremo superiore,** l'insieme di tutti i numeri reali **maggiori** (oppure **maggiori o uguali**) di un assegnato numero a.

➢ Se **a** è ***incluso*** nell'insieme si parla di *intervallo **chiuso** illimitato superiormente* e si scrive:

$$[a, +\infty[= \{x \in R \mid x \geq a\} \text{ oppure } [a, +\infty)$$

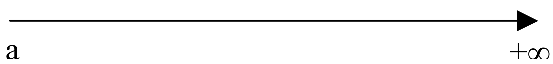
L'immagine grafica dell'intervallo è:



➢ Se **a** è ***escluso*** dall'insieme si parla di *intervallo **aperto** illimitato superiormente* e si scrive:

$$]a, +\infty[= \{x \in R \mid x > a\} \text{ oppure } (a, +\infty)$$

L'immagine grafica dell'intervallo è:

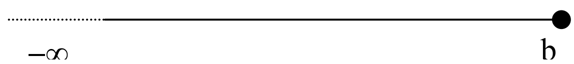


Definizione – Si chiama ***intervallo illimitato inferiormente***, avente –∞ (meno infinito) come **estremo inferiore** e il numero prefissato **b** come **estremo superiore** l'insieme di tutti i numeri reali **minori** (oppure **minori o uguali**) di un assegnato numero b.

➢ Se **b** è ***incluso*** nell'insieme l'*intervallo illimitato inferiormente* si dice ***chiuso*** e si scrive:

$$]-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\} \text{ oppure } (-\infty, b]$$

L'immagine grafica dell'intervallo è:



- Se **b** è ***escluso*** dall'insieme l'*intervallo illimitato inferiormente* si dice ***aperto*** e si scrive:

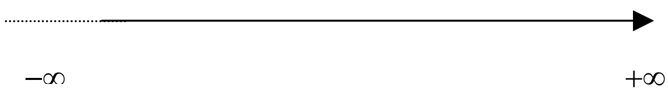
$$]-\infty, b[=\{x \in R \mid x < b\} \text{ oppure } (-\infty, b)$$

L'immagine grafica dell'intervallo è:

<u>Osservazione</u>: mentre le immagini geometriche di intervalli limitati sono segmenti (eventualmente privati di uno o entrambi gli estremi), le immagini geometriche di intervalli illimitati sono semirette (eventualmente private della loro origine).
In particolare, l'insieme *R* di tutti i numeri reali, detto continuo lineare, può essere pensato come un intervallo illimitato sia inferiormente che superiormente e si può scrivere:

$$R =]-\infty, +\infty[\text{ oppure } \overline{-\infty \quad +\infty}$$

La sua immagine geometrica è costituita da tutta la retta, asse dei numeri reali



ESTREMO INFERIORE O SUPERIORE DI UN INSIEME DI NUMERI REALI

• *Insiemi limitati o illimitati*

Detto **E** un sottoinsieme totalmente ordinato e non vuoto di R, si hanno le seguenti definizioni:

- Un numero reale **h** è un ***minorante*** di E se $\boxed{\forall\, x \in E \;\Rightarrow\; h \leq x}$

- Un numero reale **k** è un ***maggiorante*** di E se $\boxed{\forall\, x \in E \;\Rightarrow\; x \leq k}$

- Un insieme **E** non vuoto di numeri reali si dice ***limitato inferiormente*** se ammette **almeno un minorante** (cioè tutti gli elementi di E sono maggiori o uguali al numero h).

- Un insieme **E** non vuoto di numeri reali si dice ***limitato superiormente*** se ammette **almeno un maggiorante** (cioè tutti gli elementi di E sono minori o uguali del numero k)

- Un insieme **E** si dice ***limitato*** se e solo se è *limitato sia inferiormente che superiormente*, ossia esiste un intervallo [a, b] che contiene E.

I maggioranti e i minoranti di insiemi superiormente limitati ed inferiormente limitati sono *infinit*i.

Un minorante o un maggiorante di un insieme *può o no appartenere* all'insieme.

Se E è un insieme limitato allora si può sempre trovare un intervallo del tipo [–m, m] (con m>0) nel quale E è interamente contenuto.
Ossia tale che $(-m \leq x \leq m) \Leftrightarrow |x| \leq m,\ \forall x \in E$

- Un insieme per il quale *non esiste alcun maggiorante* si dice ***illimitato superiormente***.

Esempio: l'insieme dei numeri naturali $N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

- Un insieme in corrispondenza del quale *non esiste alcun minorante* si dice ***illimitato inferiormente***.

Esempio: l'insieme dei numeri interi negativi $Z = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$

- Un insieme è ***illimitato in entrambi i versi*** ,cioè sia superiormente che inferiormente, se per esso *non esiste alcun maggiorante e alcun minorante*.

Esempio: l'insieme dei numeri interi relativi $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

• *Massimo e minimo di un insieme*

Definizione – Si dice che il numero ***m***, *appartenente* all'insieme $E \subset R$, è l'elemento ***minimo*** di E se e solo se ***m*** è minore di ogni altro elemento di E.

Simbolicamente:
$\min(E) = \boldsymbol{m} \Leftrightarrow (\boldsymbol{m} \in E) \wedge (\boldsymbol{m} \leq x,\ \forall x \in E)$

Quindi: un numero reale ***m*** è il minimo di E se gli appartiene ed è un suo minorante.

Definizione – Si dice che il numero ***M,*** appartenente all'insieme $E \subset R$, è l'elemento ***massimo*** di E se e solo se ***M*** è maggiore di ogni altro elemento di E.
Simbolicamente:
$\text{Max}(E) = M \Leftrightarrow (M \in E) \wedge (M \geq x, \forall x \in E)$

Quindi: un numero reale ***M*** è il massimo di E se gli appartiene ed è un suo maggiorante.

Se E contiene un numero *finito* di elementi esiste sempre sia il minimo ***m*** che il massimo ***M***.
Se E contiene un numero *infinito* di elementi ed è limitato può essere privo di minimo e/o massimo.

Teorema – Se un insieme E ammette un minimo (massimo), questo è unico.

- ***Estremo inferiore di un insieme***

Definizione – Si dice estremo inferiore, **inf (E),** di un insieme E limitato inferiormente il massimo dei suoi minoranti.

L'estremo inferiore può appartenere o non appartenere all'insieme E; se inf (E) ***appartiene*** ad E allora è anche *minimo*.
Se $\inf(E) \in E \Rightarrow \exists \min(E) = \inf(E)$

Inversamente, se un insieme ammette un minimo, questo è anche estremo inferiore.
Se $\exists \min(E) \Rightarrow \exists \inf(E) = \min(E)$

Le proprietà dell'estremo inferiore di un insieme E sono:
1. $\forall x \in E, \inf(E) \leq x$
2. $\forall \varepsilon \in R_0^+, \exists x \in E \mid \inf(E) \leq x < \inf(E)+\varepsilon$

Se un insieme E non è inferiormente limitato si dice che il suo estremo inferiore è $-\infty$.

Teorema – L'estremo inferiore di un insieme E, se esiste, è unico.

- ***Estremo superiore di un insieme***

Definizione – Si dice estremo superiore, **sup (E),** di un insieme E limitato superiormente il minimo dei suoi maggioranti.

L'estremo superiore può appartenere o non appartenere all'insieme E; se sup (E) ***appartiene*** *ad* E allora è anche *massimo.*
Se $\sup(E) \in E \Rightarrow \exists \max(E) = \sup(E)$

Inversamente, se un insieme ammette un massimo, questo è anche estremo superiore.
Se $\exists \max(E) \Rightarrow \exists \sup(E) = \max(E)$

Le proprietà dell'estremo superiore di un insieme E sono:
1. $x \in E, \sup(E) \geq x$
2. $\varepsilon \in R_0^+, \exists x \in E \mid \sup(E)-\varepsilon \leq x < \sup(E)$

Teorema – L'estremo superiore di un insieme E, se esiste, è unico.

Se un insieme E non è superiormente limitato si dice che il suo estremo superiore è $+\infty$.

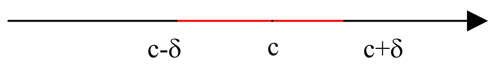
INTORNI DI UN PUNTO

Definizione – Si chiama ***intorno completo*** del punto **c** $\in$ R un qualunque intervallo aperto che contenga il punto c.

In corrispondenza dello stesso punto c esistono infiniti intorni completi.

Tra questi, di particolare interesse sono gli ***intorni circolari*** (o simmetrici) di **c**, costituiti da intervalli aperti di centro c.

Indicato con δ (numero reale positivo) il raggio di un generico intorno circolare di c, è possibile rappresentare l'intorno come segue:



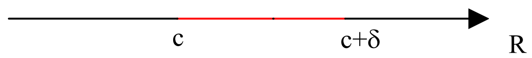
Simbolicamente:

$$\mathbf{I\ (c, \delta) =]c-\delta, c+\delta[\quad oppure \quad I\ (c, \delta) = \{\forall x \in R \mid c - \delta < x < c + \delta\}}$$

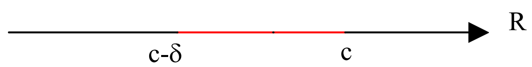
Ogni x appartenente all'intorno ha distanza dal centro c minore del raggio $\delta \Rightarrow$

$$\mathbf{x \in I\ (c, \delta) \ \Leftrightarrow \ c - \delta < x < c + \delta \ \ \Leftrightarrow \ |x-c| < \delta}$$

Definizione - Si chiama ***intorno destro*** del punto c un qualunque intervallo avente c come estremo inferiore e aperto a destra.



Definizione - Si chiama ***intorno sinistro*** del punto c un qualunque intervallo aperto a sinistra e avente c come estremo superiore.

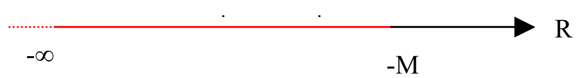


Definizione **-** Si chiama ***intorno di più infinito*** un intorno costituito dagli **x**$\in$**R** tali che **x > M**, con M > O**.**
Simbolicamente:

$$\mathbf{I\ (+\infty) =]\ M, +\infty\ [}$$

Definizione - Si chiama intorno di meno infinito un intorno costituito dagli x$\in$R tali che x < -M, con M>O.
Simbolicamente:

$$\mathbf{I\ (-\infty) =]\ -\infty, -M\ [}$$

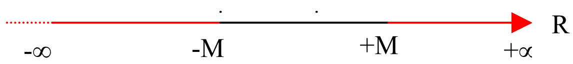


Definizione **-** Si chiama ***intorno di infinito senza segno*** un intorno costituito dagli **x**$\in$**R** tali che

$$(x < -M) \text{ vel } (x > +M) \text{ equivalente } |x| > M$$

Simbolicamente:

$$I(\infty) =]-\infty, M[\cup]M, +\infty[$$



PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI UN INSIEME

Definizione - Si dice che il punto **c** è un ***punto di accumulazione*** dell'insieme E, sottoinsieme di R, se e solo se **per ogni** intorno completo di c **esiste** sempre almeno un elemento di E, **distinto** da c e appartenente a quell'intorno.

Simbolicamente:
c è punto di accumulazione di E <=> $\forall\, \mathbf{I(c)}\ \exists\ \mathbf{x \in E - \{c\}} \mid \mathbf{x \in I(c)}$

Se si suppone che l'intorno sia soltanto sinistro o soltanto destro, il punto di accumulazione si dice rispettivamente ***punto di accumulazione destro*** o ***sinistro***.

Definizione - Un punto x_0 di un insieme che non sia di accumulazione si dice ***isolato***.

Dalle definizione precedenti, si deducono alcune importanti proposizioni:

1) Il punto c, di accumulazione per l'insieme E, è un numero reale che, a seconda dei casi, appartiene a E oppure non appartiene a E.

2) Un punto isolato di un insieme appartiene sempre all'insieme.

3) Un punto di un insieme o è di accumulazione o è isolato.

4) Se c è un estremo superiore (inferiore) di E e non appartiene ad E allora c è punto di accumulazione destro (sinistro) di E.

5) Se un insieme E possiede un numero finito di elementi allora tale insieme è privo di punti di accumulazione.

6) Se c è un punto di accumulazione di E allora in ogni I(c) cadono infiniti punti di E.

7) Se x_0 è un punto isolato di E esiste almeno un intorno di x_0 in cui non cade alcun punto di E oltre x_0.

Teorerna di Bolzano-Weierstrass.
«Se un insieme di numeri reali è ***limitato*** e composto da ***infiniti*** elementi allora tale insieme ammette ***almeno un punto di accumulazione***».

Definizione – Un insieme privo di punti di accumulazione si dice discreto.

Tutti i punti di un insieme discreto sono isolati.

Esistono insiemi di punti isolati che ammettono punti di accumulazione.

INSIEMI APERTI

Definizione - Si dice che E è un ***insieme aperto*** se e solo se ogni suo elemento è punto interno a E stesso.

Teorema
«Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme E sia aperto è che esso sia disgiunto dalla propria frontiera (ossia, se e solo se ogni punto frontiera di E non appartiene all'insieme E stesso)».

INSIEMI CHIUSI

Definizione - Si dice che E è un ***insieme chiuso*** se e solo se il suo complementare, $\overline{E}$, è un insieme aperto.

Teoremi:

1. «Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme E sia chiuso è che esso contenga la propria frontiera (ossia, se e solo se ogni punto frontiera di E appartiene ad E stesso)».

2. «Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme E sia chiuso è che esso contenga ogni suo eventuale punto di accumulazione».

Si deduce che sono insiemi chiusi i seguenti insiemi:

1. ogni insieme A costituito da un numero finito di elementi
2. l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri interi relativi;
3. l'insieme dei numeri reali
4. l'insieme che risulta dall'unione di un numero finito di insiemi chiusi

Invece, non sono chiusi i seguenti insiemi:

1. l'insieme dei numeri razionali
2. l'insieme dei numeri irrazionali