APPLICAZIONE DEI LIMITI ALLA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE FUNZIONI.

- ***ASINTOTI***

Data la funzione di equazione **y = f(x)** è possibile studiare e analizzare il suo andamento nell'intorno degli estremi degli intervalli che costituiscono il suo insieme di definizione e di individuare i suoi asintoti.
Se il grafico della funzione ha un ramo che si estende all'infinito e P(x ; y) è un suo generico punto, si chiama **asintoto del grafico della funzione** *la retta r, se esiste, alla quale il punto P si avvicina sempre più al suo tendere all'infinito lungo quel ramo.*

Una funzione può avere :

1) **Asintoti verticali** (cioè paralleli all'asse y)
2) **Asintoti orizzontali** (cioè paralleli all'asse x)
3) **Asitoti obliqui**

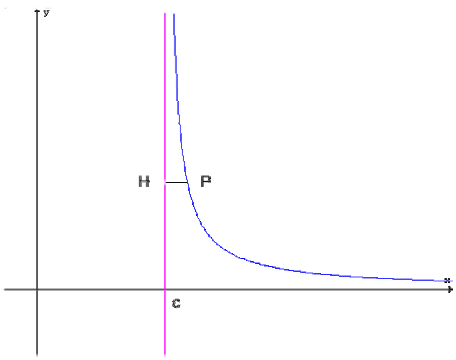
Tutti gli asintoti vengono individuati mediante l'applicazione dei limiti allo studio dell'andamento della funzione per x tendente agli estremi degli intervalli di definizione.

Asintoto verticale ⇨ ***x = a***

Una retta di equazione **x = a** è **asintoto verticale** per il grafico di una funzione y=f(x) se e solo se

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$$

Gli eventuali asintoti verticali si determinano per lo più calcolando i limiti negli estremi finiti, se esistono, dell'insieme di definizione e negli eventuali punti di discontinuità.

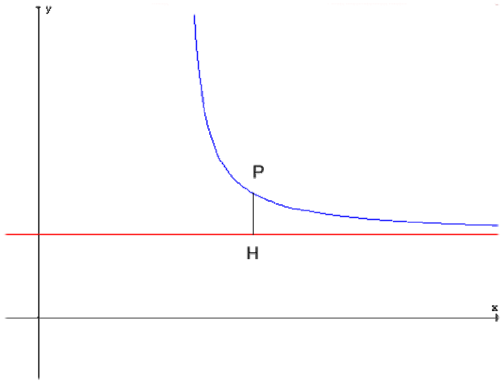


Asintoto orizzontale ⇨ ***y = l***

Una retta di equazione y = l è asintoto orizzontale per il grafico della funzione y=f(x), se e solo se

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = l}$$

Gli eventuali asintoti orizzontali si determinano calcolando i limiti negli estremi infiniti, se esistono, dell'insieme di definizione.
Le funzioni il cui insieme di definizione è limitato non possono ammettere asintoto orizzontale perchè non avrebbe senso calcolare il limite di f(x) per $x \to \infty$.
Le funzioni periodiche non possono ammettere asintoti orizzontali perchè non esiste il limite di f(x) per $x \to \infty$.

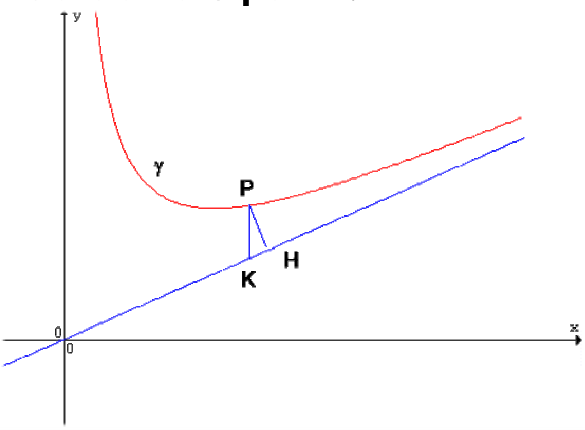


<u>Asintoto obliquo</u> ⇨ ***y=mx+q***

Una retta di equazione y=mx+q ($m \neq 0$) è asintoto obliquo per il grafico della funzione y = f(x), se e solo se

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (mx+q) \right] = 0} \qquad (1)$$

L'espressione **|f(x) - (mx+q)|** esprime la **misura del segmento PQ** e affinché la retta y=mx+q sia un asintoto per il grafico della funzione y=f(x) detta misura **deve tendere a zero per $x \to \infty$.**



✔ **Condizione necessaria** affinchè **<u>esista</u>** un asintoto obliquo è che

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty}$$

cioè che <u>il grafico della funzione abbia dei rami che si estendono all'infinito</u>.

Gli eventuali asintoti obliqui si determinano calcolando il valore dei coefficienti m e q nel seguente modo:

- **Calcolo di m**

Si divide per x l'espressione f(x) - (mx+q) e se ne calcola il limite per x→∞.

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (mx+q)\right] = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{q}{x}\right] = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} - \lim_{x \to \infty} \frac{q}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to \infty} m - \lim_{x \to \infty} \frac{q}{x} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m} \qquad (2)$$

- **Calcolo di q**

Per determinare il valore di q si sostituisce il valore trovato di m nella (1) e si ricava:

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (mx+q)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx\right] - \lim_{x \to \infty} q = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx\right] = q} \qquad (3)$$

La funzione y = f(x) ha un asintoto obliquo se esistono e sono finiti i limiti (2) e (3), con la condizione che il valore del limite (2) sia $\neq \mathbf{0}$.