DIFFERENZIALE

Sia y=f(x) una funzione derivabile in un punto $x \in I$ e Δx un incremento qualsiasi della variabile indipendente x ∍' $(x+\Delta x) \in I$.
Si chiama ***differenziale di una funzione*** f(x) **relativo al punto x e all'incremento Δx, il prodotto della derivata della funzione per l'incremento Δx.**

$$(1) \quad \boxed{\mathbf{df(x) = f'(x)\,\Delta x}} \text{ oppure } \boxed{\mathbf{dy = f'(x)\Delta x}}$$

Se la funzione è f(x) = x, il differenziale sarà:

$$\mathbf{df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dx = \Delta x} \quad (2)$$

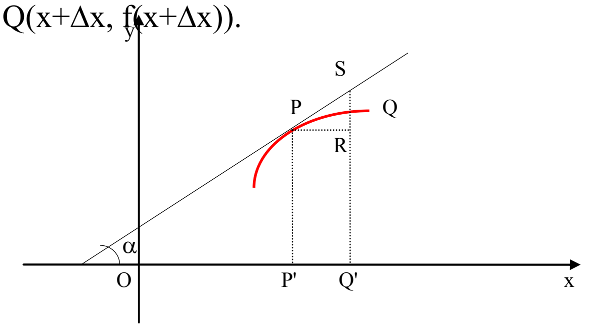
Quindi: "***Il differenziale della variabile indipendente x coincide con il suo incremento.***"

Sostituendo la (2) nella (1) si ha: $\boxed{\mathbf{df(x) = f'(x)\,dx}}$ oppure $\boxed{\mathbf{dy = f'(x)dx}}$ da cui si ricava la ***notazione di Leibniz*** per indicare la derivata della funzione f(x) $\Rightarrow$ $\mathbf{f'(x) = \dfrac{dy}{dx}}$ $\Rightarrow$ *la derivata di una funzione è uguale al quoziente tra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente.*

ESEMPI
1. $y=x^2$ con $x_0=3$ $\Rightarrow$ $dy = 2xdx \Rightarrow dy = 2 \cdot 3dx = 6dx$
2. $f(x)=x^3$ con $x_0=2$ e $\Delta x=0{,}345$ $\Rightarrow$ $df(x) = 3x^2 0{,}345 = 3 \cdot 4 \cdot 0{,}345 = 4{,}14$
3. $f(x)=x^2$ con $x_0=20$ e $\Delta x=0{,}1$ $\Rightarrow$ $df(x) = 2xdx \Rightarrow df(x) = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 4$
4. $f(x)=\ln x$ $\Rightarrow$ $df(x) = \dfrac{1}{x}dx$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL DIFFERENZIALE

Data la curva di equazione y=f(x), siano P e Q due punti di tale curva di coordinate P(x, f(x)) e Q(x+Δx, f(x+Δx)).



Dal triangolo PSR si ha:
$SR = PR \cdot tg\alpha = \Delta x \cdot tg\alpha = \Delta x \cdot f'(x) = df(x) \Rightarrow$
$\boxed{\mathbf{SR = df(x)}}$
Quindi **SR** rappresenta il **differenziale df(x)** della funzione relativo al punto x e all'incremento Δx.
Il segmento **QR** rappresenta **l'incremento Δy** della funzione relativo al punto x e all'incremento Δx.

Quindi: $$\boxed{\mathbf{QR = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}}$$

Allora ***il differenziale df(x) è uguale all'incremento di ordinata del punto della retta tangente alla curva corrispondente al passaggio dell'ascissa dal valore x al valore x+Δx***.
Sostituire all'incremento Δy della funzione il differenziale df(x) vuol dire sostituire, in [x, x+Δx], al diagramma di f(x) la retta tangente in P di ascissa x.

Se $\Delta x \to 0$, tanto più piccola sarà la differenza fra il differenziale e l'incremento della funzione. Le regole per il calcolo di un differenziale sono del tutto simili a quelle usate nel calcolo di una derivata.

OPERAZIONI CON I DIFFERENZIALI

Poiché la differenziazione di una funzione è riconducibile all'operazione di derivazione della stessa funzione, ad ogni regola di derivazione corrisponde un'analoga regola di differenziazione.
Ad esempio:

1) $\mathbf{d[f(x)+g(x)] = [f(x)+g(x)]'\,dx = [f'(x) + g'(x)]dx = f'(x)dx + g'(x)dx = df(x)+dg(x)} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{d[f(x)+g(x)]=df(x)+dg(x)}}$$

Quindi: *il differenziale della funzione somma (o differenza) di due funzioni differenziabili è uguale alla somma (o differenza) dei differenziali delle funzioni date.*

2) $\mathbf{d[f(x)\cdot g(x)]=[f(x)\cdot g(x)]'\,dx= [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)]dx = f'(x)\cdot g(x)dx + f(x)\cdot g'(x)dx =}$
$\mathbf{= g(x)\cdot df(x) + f(x)\cdot dg(x)} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{d[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot dg(x) + g(x)\cdot df(x)}}$$

Quindi: *il differenziale della funzione prodotto di due funzioni differenziabili è uguale alla somma dei prodotti di ciascuna funzione per il differenziale dell'altra.*

3) $$\mathbf{d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' dx = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx = \frac{g(x)f'(x)dx - f(x)g'(x)dx}{g^2(x)} = \frac{g(x)\cdot df(x) - f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)}}$$

$$\boxed{\mathbf{d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot df(x) - f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)}}}$$

Quindi: *il differenziale della funzione quoziente di due funzioni differenziabili è uguale al quoziente tra la differenza dei prodotti di ciascuna funzione per il differenziale dell'altra e il quadrato della funzione che compare al denominatore.*