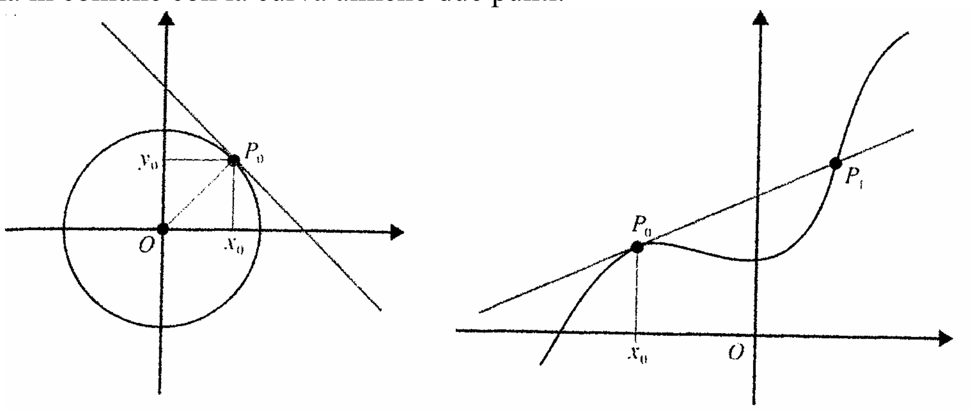
Derivate delle funzioni di una variabile

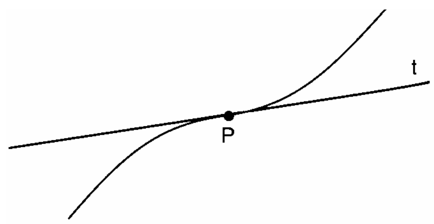
Il concetto di ***derivata*** di una funzione di una variabile è uno dei più importanti di tutta la matematica sia per le sue implicazioni di natura puramente teorica, sia per le numerose applicazioni di tipo pratico. La nozione di derivata è alla base del ***calcolo differenziale*** che, insieme con il ***calcolo integrale**,* costituisce ***l'analisi infinitesimale***.
Il calcolo differenziale fu inventato, nel XVII secolo, da Newton e Leibniz, che indipendentemente l'uno dall'altro, introdussero la nozione di derivata e di differenziale.
I problemi che in particolare diedero origine al concetto di derivata e che per tale motivo rappresentano il punto di partenza per il calcolo differenziale, sono:
il ***problema delle tangenti*** e il ***problema della velocità istantanea***.
Storicamente, la derivata si presenta come la risposta più efficace al *problema delle tangenti,* cioè al *problema di come determinare la retta tangente a una qualsiasi curva in un suo punto*.
Già i greci si erano occupati della questione: Archimede, Apollonio e Pappo avevano elaborato metodi ingegnosi per costruire tangenti alle coniche e a curve più complesse, come la famosa *spirale di Archimede.*
Si trattava comunque di metodi particolari, applicabili caso per caso, e che non possedevano perciò il carattere di procedimento generale, valido per tutte le curve.
Nel Seicento anche Fermat e Cartesio, con l'introduzione della *geometria analitica*, diedero un notevole impulso alle ricerche in questo campo.

Il problema delle tangenti

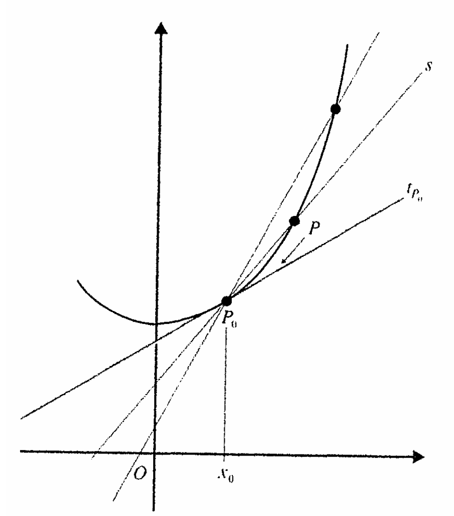
Per definire la *retta tangente ad una curva in un suo punto* non è possibile estendere ad essa la definizione adottata dalla geometria elementare nel caso della circonferenza ("Si chiama *tangente alla circonferenza* in un suo punto P_0 quella particolare retta avente in comune con la circonferenza soltanto il punto P_0") perché la retta tangente ad una qualsiasi curva in un suo punto P_0 ha in comune con la curva almeno due punti.



Non è possibile utilizzare neanche l'altra definizione che si dà in geometria elementare per la tangente e che afferma: "La tangente è la retta che, passante per P, lascia la curva tutta da una stessa parte rispetto alla retta". Infatti, nel caso di una curva qualsiasi, la tangente può lasciare la curva da parti opposte.

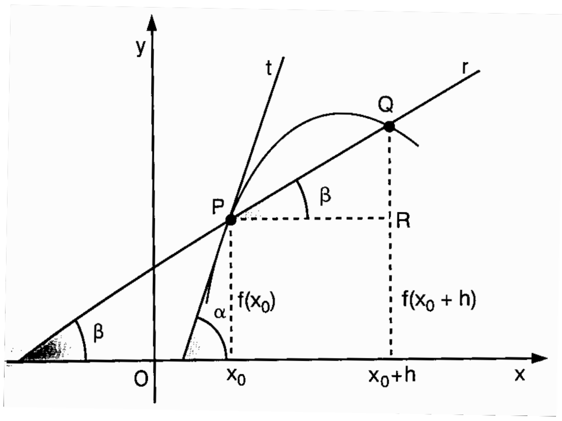


E' invece più opportuno introdurre il concetto di tangente attraverso un procedimento di tipo dinamico.
Ossia:
" Si chiama **tangente ad una curva piana in un suo punto P_0** la *posizione limite* (se esiste) della retta P_0P che unisce P_0 con un altro punto P della curva, allorché il punto P, mouvendosi sulla curva, si avvicina indefinitamente a P_0".



Data questa definizione di tangente si pone il problema di trovare l'equazione della retta tangente ad una curva di equazione y=f(x) in un suo punto P_0 .

Procedimento risolutivo del problema delle tangenti



Sappiamo che l'equazione della tangente passante per il punto P (x_0, y_0) è:

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

dove m rappresenta il coefficiente angolare della retta ed è dato da $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Per determinare il valore di m (=tgα) consideriamo sulla curva un altro punto Q di coordinate $[x_0+h, f(x_0+h)]$.

Il coefficiente angolare della secante PQ sarà: $m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Il coefficiente angolare della tangente (se $Q \to P$) sarà: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Poiché $tg\beta = \frac{RQ}{PR} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} tg\beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = tg\alpha$

Quindi: se la curva y=f(x), nel punto di ascissa x_0, ammette una retta tangente, non parallela all'asse y, il coefficiente angolare di tale retta è dato dal

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite, quando esiste ed è finito, viene detto ***derivata*** della funzione f(x) calcolata nel punto x_0.
Da questo e da altri problemi è nata la definizione di derivata.

Derivate

Definizione

Data la funzione y = f(x) definita in un intervallo [a, b] si chiama *derivata* della funzione f(x) nel punto x_0 $\in]a,b[$ il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ al tendere a zero dell'incremento h della variabile indipendente.

Note

- Se da x_0 si passa ad un altro punto qualunque $x_0 + h$, dell'intervallo [a, b], si dice che si è dato alla variabile x **l'incremento** (positivo o negativo) **h**.

- La differenza: $f(x_0 + h) - f(x_0)$, tra i valori che la funzione assume quando la variabile x passa dal valore x_0 al valore $x_0 + h$, si chiama **incremento della funzione** e può avere valore positivo, negativo o nullo.

- Il rapporto $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si chiama **rapporto incrementale** della funzione f(x) relativo al punto x_0 e all'incremento h; precisamente, si chiama rapporto incrementale **destro o sinistro** secondo che sia: h > 0, oppure: h < 0.

La derivata si indica con uno qualunque dei seguenti simboli:

$f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $[Df(x)]_{x=x_0}$, $D\,f(x_0)$, $\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$, ecc.

(La notazione f '(x) risale a LAGRANGE, la notazione Df(x) a CAUCHY).
Pertanto la derivata f '(xo) della funzione f(x) è definita dalla relazione:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

nell'ipotesi che il limite **esista e sia finito.**
L'operazione con la quale si calcola la derivata di una funzione f(x) *è* detta la **derivazione** di questa funzione.

Può darsi che, pur non esistendo il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale, esista e sia finito tuttavia il limite a sinistra o il limite a destra, od entrambi; questi si chiameranno allora, rispettivamente, **derivata sinistra e derivata destra** di f (x) in x_0.

Nel seguito quando diremo che la funzione f (x) è derivabile nel punto x_0, intenderemo sempre che in questo punto esista finita sia la derivata sinistra che la derivata destra e che queste siano fra loro eguali.

Negli estremi a e b, dell'intervallo [a, b], la derivata coincide rispettivamente con la derivata destra e sinistra.

Se la funzione f (x) è derivabile in ogni punto interno all'intervallo [a, b] e se ammette derivata destra nel punto **a** e derivata sinistra nel punto **b**, la f(x) si dice ***derivabile nell'intervallo chiuso*** **[a, b]**.

Teorema

Se una funzione è derivabile nel punto x_0, allora è necessariamente continua in tale punto.

Dimostrazione

L'incremento della funzione $f(x_0 + h) - f(x_0)$ può essere così scritto:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{con } h \neq 0$$

Considerando i limiti, per $h \to 0$, di entrambi i membri, si ha:

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right] = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Poiché per ipotesi f è derivabile $\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ e quindi

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right] = 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

Ricordando che una funzione f è continua in x_0 quando si verifica che:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \text{ ovvero quando } \lim_{h\to 0}\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right] = 0$$

si ha che la f è continua in x_0.

Da questo teorema segue che:

Nei punti di discontinuità una funzione non può ammettere derivata.

La proprietà inversa del teorema dato non è vera; cioè: se una funzione è continua in un punto x_0 non è detto che sia derivabile in tale punto.

Esempi

- La funzione $y = \sqrt[3]{x}$ è continua in $x_0 = 0$, ma non è ivi derivabile (il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ è $+\infty$).
- La funzione $y = x^2 + |x - 1|$ è continua in $x_0 = 1$, ma non è ivi derivabile (i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale, per $h \to 0$, non sono uguali).

Dunque: la derivabilità è un condizione più restrittiva della continuità.

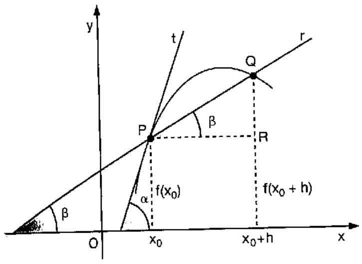
Osservazioni

- Si parla di derivata, per le funzioni definite su un intervallo, nei punti x_0 interni all'intervallo (a, b).
- La derivata di f in $x_0 \in (a, b)$, quando esiste, è un numero.
- Se la derivata di f esiste in ogni punto di (a, b), allora possiamo pensare alla funzione di dominio (a, b) che associa ad ogni punto $x_0 \in (a, b)$ quel numero che è la derivata di f in x_0. Tale funzione si dice «***funzione derivata***».
  In generale la *funzione derivata* è una funzione avente come dominio l'insieme dei punti in cui esiste la derivata di f, ed è tale che il valore da essa assunto in x_0 è $f'(x_0)$.

Significato geometrico di derivata

Considerando il problema delle tangenti, da cui, storicamente, trae origine la derivata, si può affermare che ***il rapporto incrementale della funzione f(x) si identifica con il coefficiente angolare della secante PQ che unisce i due punti di ascissa x_0 e x_0+h.***
Facendo tendere h a 0 accade conseguentemente che:

- Il punto Q tende al punto P
- La secante r tende alla retta tangente t
- Il coefficiente angolare di r tende al coefficiente angolare di t
- Il rapporto incrementale tende alla derivata della funzione in x_0.



Da tutto ciò segue che:
La derivata di una funzione f(x) in un suo punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto alla curva di equazione y = f(x).

Nota
La derivabilità di una funzione in un punto implica l'esistenza della tangente alla curva nel punto corrispondente.

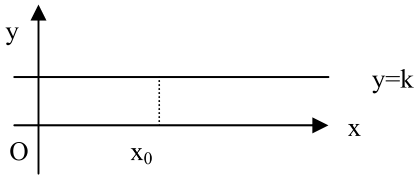
Derivate di alcune funzioni elementari

Funzione	Derivata
y=c	y' =0
y=x	y'=1
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
y=senx	y'=cosx
y=cosx	y'=-senx
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\cdot\log a}$
y=logx	$y'=\frac{1}{x}$
$y=a^x$	$y'=a^x \log a$
$y=e^x$	$y'=e^x$

Teoremi sul calcolo delle derivate

✍ **Teorema 1.**

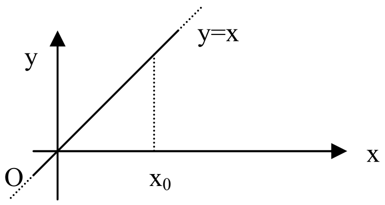
La derivata di una funzione costante y=k, il cui insieme di definizione è R, è zero.
Dimostrazione



Preso un $\forall$ punto $x_0 \Rightarrow$ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$

✍ **Teorema 2.**

La derivata della funzione y=x è y'=1.
Dimostrazione



Preso un $\forall$ punto x_0 ha:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=1$$

✍ **Teorema 3.**

La derivata della funzione $y=x^n$ con $n \in N_0$ è la funzione $y'=n\cdot x^{n-1}$.

✍ **Teorema 4.**

La derivata della funzione y=$\sqrt{x}$ è la funzione y'=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Dimostrazione
Preso un $\forall$ punto x_0 ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}_0+\cancel{h}-\cancel{x}_0}{\cancel{h}\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

✍ **Teorema 5.**

La derivata della funzione y=sen x è y'=cos x in tutto R

Dimostrazione

Preso un $\forall$ punto x_0 si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x_0+h)-\operatorname{sen} x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x_0\cdot\cos h+\cos x_0\cdot\operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x_0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x_0\cdot(\cos h-1)+\cos x_0\cdot\operatorname{sen} h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\operatorname{sen} x_0\cdot\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x_0\cdot\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)=$$

$$=\operatorname{sen} x_0\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x_0\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}=\operatorname{sen} x_0\cdot 0+\cos x_0\cdot 1=\cos x_0$$

Si dimostra in modo analogo il seguente teorema:

✍ **Teorema 6.**

La derivata della funzione cos x è y'= - sen x.

✍ **Teorema 7.**

La derivata della funzione y=log$_a$x (con a>0 e a≠1), definita in R_0^+, è y'=$\frac{1}{x}\log_a e$

In particolare, se si pone a=e e quindi log e =1, si ha:

La derivata della funzione y=log x è y'=$\frac{1}{x}$.

✍ **Teorema 8.**

La funzione y=e^x è sempre derivabile in R e la sua derivata è la funzione y'= e^x.

Dimostrazione

Preso un $\forall$ punto x_0 ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}\cdot e^h-e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}\left(e^h-1\right)}{h}=$$

$$=e^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}=e^{x_0}\cdot 1=e^{x_0}$$

In modo analogo si dimostra che:

✍**Teorema 9.**

La derivata della funzione y=a^x (con a costante positiva e x$\in$ R) è y'= a^x log a.

Il calcolo con le derivate

La determinazione della derivata di funzioni aventi una rappresentazione analitica piuttosto complessa, applicando la definizione di derivata è, a volte, molto laboriosa.
I seguenti teoremi consentiranno di semplificare la procedura di calcolo della derivata di una generica funzione.

✍ **Teorema della somma**

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in un intervallo I allora anche la funzione somma f(x)+g(x) è derivabile in I e risulta:

$$\boxed{y = [f(x) + g(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) + g'(x)}$$

cioè ***la derivata della somma di funzioni è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni.***
Dimostrazione
Se x_0 è un punto qualsiasi di I, il rapporto incrementale della funzione somma in x_0 è:

$$\frac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$
$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ha:

$$\lim_{h\to 0} \frac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)-g(x_0)]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$
$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

In particolare se g(x) è la funzione costante, cioè se è g(x)=k, si ha:

$$\boxed{y = [f(x) + k] \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x)}$$

In modo analogo si dimostra che:

✍ **Teorema della differenza**

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in un intervallo I allora anche la funzione differenza f(x)-g(x) è derivabile in I e risulta:

$$\boxed{y = [f(x) - g(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) - g'(x)}$$

cioè ***la derivata della differenza tra funzioni è uguale alla differenza delle derivate delle singole funzioni.***

In generale:
La derivata della somma algebrica di più funzioni derivabili è uguale alla somma algebrica delle derivate delle singole funzioni.

✍ Teorema del prodotto

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in un intervallo I allora anche la funzione prodotto f(x)·g(x) è derivabile in I e risulta:

$$\boxed{y = [f(x) \cdot g(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}$$

cioè ***la derivata del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto della derivata della prima funzione per la seconda più il prodotto della derivata della seconda funzione per la prima.***

<u>Dimostrazione</u>

Se x_0 è un punto qualsiasi di I, il rapporto incrementale della funzione prodotto in x_0 è:

$$\frac{[f(x_0+h) \cdot g(x_0+h)] - [f(x_0) \cdot g(x_0)]}{h} = \text{sottraendo e sommando } f(x_0+h) \cdot g(x_0) \text{ al numeratore si ha}$$

$$= \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0+h) \cdot g(x_0) + f(x_0+h) \cdot g(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0+h) \cdot g(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} =$$

$$= f(x_0+h) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(x_0+h) \cdot g(x_0+h)] - [f(x_0) \cdot g(x_0)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x_0+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

In particolare se g(x) è la funzione costante, cioè se è g(x)=k, si ha:

$$\boxed{y = k \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = k \cdot f'(x)}$$

cioè ***la derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione.***

In generale, si ha:
La derivata del prodotto di n funzioni è uguale alla somma degli n prodotti della derivata di ciascuna funzione per le rimanenti n-1 funzioni non derivate.

In modo analogo si dimostra che:

✍ Teorema del quoziente

Se f(x) e g(x) sono due funzioni derivabili in un intervallo I ed è $g(x)\neq 0$, $\forall x \in I$, allora anche la funzione quoziente f(x) / g(x) è derivabile in I e risulta:

$$\boxed{y=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

cioè ***la derivata del quoziente di due funzioni è uguale ad una frazione avente per denominatore il quadrato del divisore e per numeratore il prodotto della derivata del dividendo per il divisore diminuito del prodotto del dividendo per la derivata del divisore.***

In particolare, se f(x)=1, e quindi f'(x)=0, si ha:

$$\boxed{y=\frac{1}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

cioè ***la derivata della reciproca di una funzione derivabile è uguale ad una frazione avente per denominatore il quadrato della funzione e per numeratore l'opposto della della derivata della funzione.***

In particolare:

$$y=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{1}{x^2}$$

Derivata delle funzioni composte

Per determinare la derivata delle funzioni ottenibili attraverso operazioni di composizione di due o più funzioni si ricorre al seguente teorema:

Sia $g(x)$ una funzione definita in un intervallo I e derivabile in $x_0 \in I$ e sia $f(z)$ una funzione definita in I', tale che $g(I) \subseteq I$, e derivabile nel punto $z_0 = g(x_0)$.
Allora la funzione composta $F(x) = f[g(x)]$ è derivabile in x_0, e si ha:

$$\boxed{F'(x_0) = f'(z_0) \cdot g'(x_0)}$$

cioè ***la derivata di una funzione composta è uguale al prodotto delle derivate delle funzioni componenti.***

Questo teorema è estendibile anche al caso in cui le funzioni componenti siano più di due.
Ad esempio, se è:
$y = f(z),\ \ z = g(u),\ \ u = h(x) \ \ \Rightarrow \ \ y = f\left\{g\left[h\left(x\right)\right]\right\}$ e quindi: $\boxed{y' = f'(z) \cdot g'(u) \cdot h'(u)}$

Esempio
Derivare la funzione $y = sen(x^2 + x + 1)$
Le funzioni componenti sono:
$g(x) = x^2 + x + 1$ e $f(z) = sen\ z \ \ \Rightarrow \ \ y' = \cos(x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1)$

Applicando la regola di derivazione di una funzione composta, è possibile ricavare altre due regole di derivazione:

a) Se a>0, a≠1 e *f*(*x*) è derivabile, allora anche $y = a^{f(x)}$ è derivabile e risulta:

$$\boxed{y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a}$$

b) In particolare, per a=e, si ha:

$$\boxed{y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

Derivata delle funzioni inverse

Data la funzione y=f(x) definita e invertibile in un intervallo I, se f(x) è derivabile in I, vale il teorema:

Sia y=f(x) una funzione continua e derivabile in un intervallo I e sia x=g(y) la sua inversa, se f(x) è derivabile nel punto $x_0 \in I$, con derivata $f'(x_0) \neq 0$, allora anche g(y) è derivabile nel punto $y_0=f(x_0)$ e si ha:

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

cioè ***la derivata di una funzione inversa è il reciproco della derivata della funzione data***.

Esempio

La funzione $y = \sqrt[n]{x}$ è l'inversa di $x = y^n \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Derivate di ordine superiore al primo

Se la funzione f(x) è una funzione derivabile in un intervallo (a, b) e la sua derivata f ’(x) è una funzione anch’essa derivabile in (a, b), allora si dice *derivata seconda* (o derivata del secondo ordine) la derivata della derivata di f(x).

La derivata seconda si indica con uno dei simboli:

$$y'', \quad f''(x), \quad D^2y, \quad D^2f(x)$$

Esempio:
$y=6x^3 \quad y'=18x^2 \quad y''=36x$

Se la derivata seconda è una funzione ancora derivabile, si dice *derivata terza* (o del terzo ordine) la derivata della seconda.
La derivata terza si indica con uno dei simboli:

$$y''', \quad f'''(x), \quad D^3y, \quad D^3f(x)$$

In generale, la *derivata n-esima*, o di ordine n, di una funzione f(x) è la derivata della derivata di ordine (n-1)-esimo.

Per indicare la derivata quarta, quinta, ... di una funzione si usano i simboli:

$$y^{IV}, \quad y^{V}, \quad y^{VI}, \ldots, \quad y^{n}$$

Per uniformità la derivata f ’(x) viene detta *derivata prima*.

Nota
In generale le derivate successive hanno una rappresentazione analitica più complessa della funzione.
Nel caso delle funzioni polinomiali invece, le derivate successive diventano più semplici e per una funzione polinomiale di grado n, tutte le derivate successive, a partire da quella di ordine n+1, si annullano.

Esempio:
$y=3x^2+x \quad y'=6x+1 \quad y''=6 \quad y'''=0 \quad y^{IV}=0, \ldots$

Applicazioni del calcolo delle derivate alla geometria

1. Equazione della tangente a una curva

Data la curva di equazione y=f(x), il coefficiente angolare della tangente alla curva in un punto di ascissa x_0 è $f'(x_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$

2. Equazione della normale ad una curva

Si chiama normale alla curva nel punto $P(x_0, y_0)$, la retta perpendicolare alla tangente alla curva in $P(x_0, y_0)$.

La sua equazione è: $\boxed{y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)}$