# LIMITI DI UNA FUNZIONE

Per ottenere un'informazione completa su di una funzione occorrerebbe calcolare tutti i valori della funzione per ogni valore di x, ma ciò è impossibile perché tali valori sono infiniti.
E' invece possibile studiare il comportamento della funzione nelle "vicinanze" di un punto $x_0$ (punto di accumulazione) appartenente o no al dominio della funzione.
Dunque bisogna scoprire il valore a cui tende la funzione quando la x tende a $x_0$.

ESEMPI

1. $y=\frac{4}{(x-1)^2}\qquad D=\{\forall x\in R\,/\,x\neq 1\}$

Poiché il punto $x_0=1$ è un punto di accumulazione del dominio, è possibile studiare il comportamento della funzione nei punti x che si addensano intorno a $x_0$. Vogliamo quindi conoscere il valore (finito o infinito) a cui tende la funzione quando x tende a $x_0$ sia da sinistra sia da destra.
Attribuendo ad x dei valori maggiori di $x_0$ (ad es. 1,5, ...,1,001) si nota che la funzione tende a $+\infty$ e quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{4}{(x-1)^2}=+\infty$$

Attribuendo ad x dei valori minori di $x_0$ (ad es. 0,999, ...,0,5) si nota che la funzione tende a $+\infty$ e quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{4}{(x-1)^2}=+\infty$$

Poiché il limite sinistro e quello destro sono uguali, si può concludere che

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{4}{(x-1)^2}=+\infty}$$

2. $y=\frac{2x^2+x-3}{x-1}\qquad D=\{\forall x\in R\,/\,x\neq 1\}\ \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}=5$

3. $y=tg(x)\qquad D=\left\{\forall x\in R/0\leq x\leq \pi \text{ e } x\neq\frac{\pi}{2}\right\}\ \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tg(x)=+\infty \text{ e } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tg(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg(x)=\infty$

# LIMITE FINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO

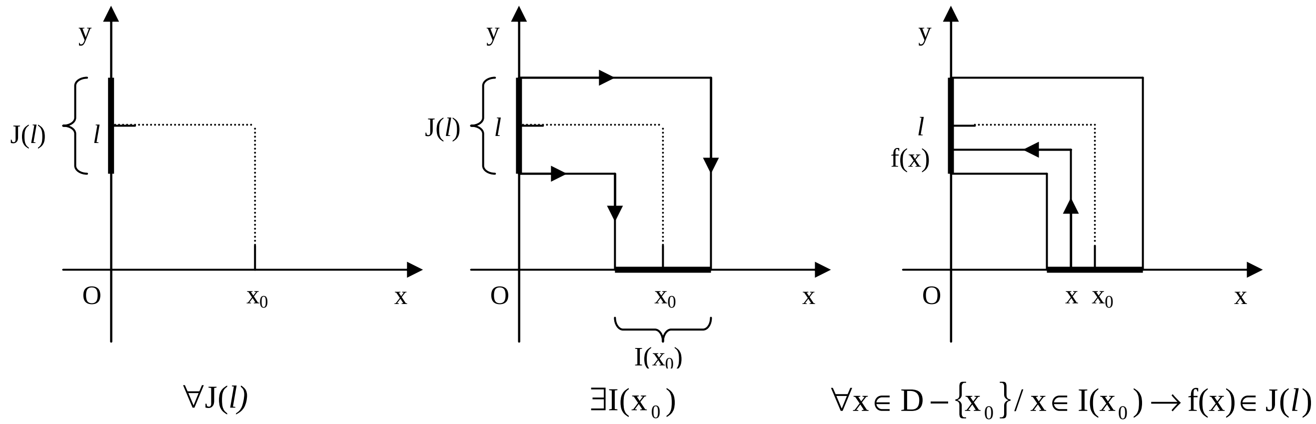
## ■ DEFINIZIONE TOPOLOGICA

**Si dice che $l \in R$ è il limite della funzione y = f(x), per x tendente a $x_0 \in R$ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

**se per ogni intorno J(*l*) di centro *l* esiste un intorno $I(x_0)$ di centro $x_0$ tale che:**

$$\forall x \ \left(x \in \left(I(x_0) - \{x_0\}\right) \cap D\right) \Rightarrow f(x) \in J(l)$$




Dire che attribuendo ad x valori "sufficientemente vicini" a $x_0$ (ma non coincidenti con $x_0$) i corrispondenti valori di f(x) risultano "sufficientemente vicini" ad un numero *l* vuol dire che fissato un numero reale $\varepsilon > 0$, piccolo a piacere, raggio dell'intorno J(*l*), è possibile trovare un numero reale $\delta > 0$ , raggio dell'intorno $I(x_0)$ tale che per ogni $x \in D - \{x_0\}$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$

### ESEMPIO

Data la funzione: $y = \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2}$ , applichiamo la definizione di limite per dimostrare che $\lim_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} = 4$, $\forall x \in R - \{2\}$

➢ **Procedimento:**

1. Si fissa un qualunque intorno **J** del punto ***l* = 4** di raggio un numero reale positivo **ε**, piccolo a piacere:

   $J_{4,\varepsilon} = \{y \in R / |y - 4| < \varepsilon\} = \{y \in R / 4 - \varepsilon < y < 4 + \varepsilon\}$

2. Si deve dimostrare l'esistenza di un intorno **I** di **$x_0$ = 2**, associato al precedente intorno e avente ampiezza **2δ** (dipendente da ε), tale che tutti i

suoi punti x (x ≠ 2) abbiano la corrispondente immagine f(x) che cade nell'intorno J di 4:

$$f(x) \in J_{4,\varepsilon} \Rightarrow 4 - \varepsilon < f(x) < 4 + \varepsilon \quad \text{ovvero} \quad |f(x) - 4| < \varepsilon$$

- **In pratica:**

Fissato un numero $\varepsilon > 0$, si deve risolvere la disequazione

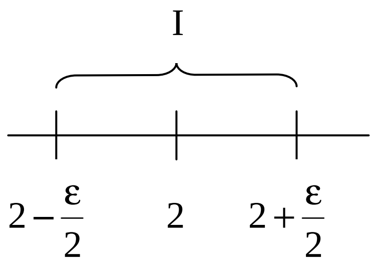
$$\left|\frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

Poiché;

$$\frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} - 4 = \frac{3x^2 - 8x + 4 - 4x + 8}{x - 2} = \frac{3x^2 - 12x + 12}{x - 2} = \frac{(3x - 6)(x - 2)}{x - 2} = 3x - 6$$

Si ha $|3x - 6| < \varepsilon$ da cui si ricava $2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{3}$

Quindi la disequazione (1) è soddisfatta da tutti i valori interni all'intervallo I di estremi $2 - \frac{\varepsilon}{3}$ e $2 + \frac{\varepsilon}{3}$, escluso il numero 2.




L'intervallo I costituisce un intorno completo del numero 2 e la sua ampiezza dipende da $\varepsilon$ che noi abbiamo fissato piccolo a piacere (ad es. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$,... )

Quindi, per quanto piccolo sia $\varepsilon$ la disequazione (1) ammette sempre soluzioni e queste formano l'intorno completo $I_{2,\frac{\varepsilon}{2}}$

<u>Conclusione</u>:

Per quanto piccolo sia $\varepsilon > 0$ $\exists$ $I(2)$ / $\forall x \in (I(2) - \{2\}) \cap D \Rightarrow f(x) \in J(4)$ ovvero

$$\left|\frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon$$

## ■ DEFINIZIONE CLASSICA

**Si dice che $l \in R$ è il limite della funzione y = f(x), per x tendente a $x_0 \in R$ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

**se, comunque si fissi un numero reale $\varepsilon > 0$, è sempre possibile trovare, in sua corrispondenza, un numero reale $\delta > 0$ tale che**

$$\forall x \in D - \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

# LIMITE INFINITO PER UNA FUNZIONE IN UN PUNTO

Può verificarsi che attribuendo a x valori "sufficientemente vicini" a $x_0$, i corrispondenti valori di f(x) risultino, in valore assoluto, sempre più grandi.
Più precisamente:

## ■ DEFINIZIONE TOPOLOGICA

**Si dice che la funzione y=f(x) tende ad infinito per x tendente a $x_0 \in R$ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$$

**se per ogni intorno dell'infinito $J_\infty$ esiste un intorno $I(x_0)$ di centro $x_0$ tale che:**

$$\forall x \ \left(x \in \left(I(x_0) - \{x_0\}\right) \cap D\right) \Rightarrow f(x) \in J_\infty$$

Oppure:

## ■ DEFINIZIONE CLASSICA

**Si dice che la funzione y=f(x) tende ad infinito per x tendente a $x_0 \in R$ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$$

**quando, fissato un arbitrario numero reale M > 0, è possibile trovare, in sua corrispondenza, un numero reale δ > 0 tale che**

$$\forall x \in D - \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)| > M$$

➢ **In pratica:**

Fissato un numero M > 0, bisogna determinare un intorno $I(x_0)$, il cui raggio δ sia dipendente da M, per ogni x del quale il corrispondente punto della curva abbia un'ordinata che superi, in valore assoluto il numero M.

### ESEMPIO

Data la funzione $y = \frac{1}{x^2}$ si applica la definizione di limite per dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \forall x \in R - \{0\}$$

Se, attribuendo a x valori "sufficientemente vicini" a $x_0$, si verifica che i corrispondenti valori di f(x) risultano <u>sempre più grandi</u>, si dirà che la **funzione tende a +∞**.

Più precisamente:

## ■ DEFINIZIONE TOPOLOGICA

**Si dice che la funzione y=f(x) tende a più infinito per x tendente a $x_0 \in R$ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$

**se per ogni intorno di più infinito $J_{+\infty}$ esiste un intorno $I(x_0)$ di centro $x_0$ tale che:**

$$\forall x \ \left(x \in \left(I(x_0) - \{x_0\}\right) \cap D\right) \Rightarrow f(x) \in J_{+\infty}$$

Oppure:

## ■ DEFINIZIONE CLASSICA

**Si dice che la funzione y=f(x) tende a più infinito per x tendente a $x_0 \in R$ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$

**quando, fissato un arbitrario numero reale M > 0, è possibile trovare, in sua corrispondenza, un numero reale $\delta > 0$ tale che**

$$\forall x \in D - \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > M$$

➢ **In pratica:**

Fissato un numero M > 0, bisogna determinare un intorno $I(x_0)$, il cui raggio $\delta$ sia dipendente da M, per ogni x del quale il corrispondente punto della curva abbia un'ordinata che superi il numero M.

### ESEMPIO

Data la funzione $y = \frac{4}{(x-1)^2}$ si applica la definizione di limite per dimostrare che

$$\lim_{x \to 1} \frac{4}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \forall x \in R - \{1\}$$

Se, attribuendo a x valori "sufficientemente vicini" a $x_0$, si verifica che i corrispondenti valori di f(x) risultano <u>sempre più piccoli</u>, si dirà che la **funzione tende a - ∞**.

Più precisamente:

## ■ DEFINIZIONE TOPOLOGICA

**Si dice che la funzione y=f(x) tende a meno infinito per x tendente a $x_0 \in R$ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

**se per ogni intorno di meno infinito $J_{-\infty}$ esiste un intorno $I(x_0)$ di centro $x_0$ tale che:**

$$\forall x \ \left(x \in \left(I(x_0) - \{x_0\}\right) \cap D\right) \Rightarrow f(x) \in J_{-\infty}$$

Oppure:

## ■ DEFINIZIONE CLASSICA

**Si dice che la funzione y=f(x) tende a meno infinito per x tendente a $x_0 \in R$ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

**quando, fissato un arbitrario numero reale M > 0, è possibile trovare, in sua corrispondenza, un numero reale δ > 0 tale che**

$$\forall x \in D - \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < -M$$

➢ **In pratica:**

Fissato un numero M > 0, bisogna determinare un intorno $I(x_0)$, il cui raggio δ sia dipendente da M, per ogni x del quale il corrispondente punto della curva abbia un'ordinata minore del numero M.

### ESEMPIO

Data la funzione $y = \frac{-1}{(x-3)^2}$ si applica la definizione di limite per dimostrare

che

$$\lim_{x \to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = -\infty, \quad \forall x \in R - \{3\}$$

Nota

Se una funzione non è definita per $x = x_0$ ed il limite per x tendente a $x_0$ esiste ed è infinito allora il suo grafico ha per ***asintoto verticale*** la retta $\mathbf{x = x_0}$.

# LIMITE FINITO PER X CHE TENDE ALL'INFINITO

Può verificarsi che, attribuendo ad x valori sempre più grandi in valore assoluto, i valori corrispondenti della funzione risultino sufficientemente vicini a un numero *l* oppure, in valore assoluto, sempre più grandi.

Più precisamente:

## ■ DEFINIZIONE TOPOLOGICA

**Si dice che la funzione y=f(x), per x tendente a ∞, ha per limite *l* e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = l}$$

**se per ogni intorno J *l* di *l* esiste un intorno dell'infinito I(∞) tale che:**

$$\forall x \ \left(x \in I_{\infty}\right) \Rightarrow f(x) \in J_{l}$$

Oppure:

## ■ DEFINIZIONE CLASSICA

**Si dice che la funzione y=f(x) tende a *l* per x tendente a ∞ e si scrive**

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = l}$$

**quando, fissato un arbitrario numero reale ε > 0, è possibile trovare, in sua corrispondenza, un numero reale N > 0 tale che**

$$\forall x \in D, \ |x| > N \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon \quad (1)$$

<u>Nota</u>
Se x→+∞ (-∞) la (1) è soddisfatta soltanto per x > N (x < -N) , ∀N > 0 e si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \textbf{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Esempi

- Data la funzione $y=\dfrac{2x-1}{x}$ , ∀x∈R-{0} verificare che: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$
- Data la funzione $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ , ∀x∈R-{1} verificare che: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$

- Data la funzione $y=\frac{x}{x^2+1}$ , $\forall x \in R$ verificare che: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

La retta ***y=l*** è un **asintoto orizzontale** per la funzione.

2) **Si dice che la funzione y=f(x), per x tendente a ∞, ha per limite ∞ e si scrive**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

**se per ogni intorno J $_\infty$ di infinito esiste un intorno dell'infinito I(∞) tale che:**

$$\forall x \ \left(x \in I_\infty\right) \Rightarrow f(x) \in J_\infty$$

Oppure:
**Si dice che la funzione y=f(x) tende a ∞ per x tendente a ∞ e si scrive**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

**quando, fissato un arbitrario numero reale M > 0, è possibile trovare, in sua corrispondenza, un numero reale N > 0 tale che**

$$\forall x \in D, \ \ |x| > N \ \Rightarrow \ |f(x)| > M \quad (1)$$

<u>Nota</u>

- Se per $|x| > N \Rightarrow f(x) > M \Rightarrow$ si dirà che esiste il $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
- Se per $|x| > N \Rightarrow f(x) < -M \Rightarrow$ si dirà che esiste il $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
- Se per $x > N \Rightarrow |f(x)| > M \Rightarrow$ si dirà che esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$
- Se per $x > N \Rightarrow f(x) > M \Rightarrow$ si dirà che esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Se per $x > N \Rightarrow f(x) < \text{-}M \Rightarrow$ si dirà che esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- Se per $x < -N \Rightarrow |f(x)| > M \Rightarrow$ si dirà che esiste il $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
- Se per $x < -N \Rightarrow f(x) > M \Rightarrow$ si dirà che esiste il $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- Se per $x < -N \Rightarrow f(x) < -M \Rightarrow$ si dirà che esiste il $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$