LA LOGICA

La ***logica*** (dal greco *logos*=ragione/parola) è la scienza del ragionamento.

Nasce come branca della filosofia e dall'Ottocento in poi diviene campo di studio da parte anche dei matematici.

LE PROPOSIZIONI

Alla base della logica ci sono le proposizioni.

Si dice **proposizione** un'affermazione vera o falsa.

I concetti di vero e falso li assumiamo come primitivi, cioè li useremo senza definirli.

Per indicare che una proposizione è vera utilizzeremo il simbolo **V** , per indicare che una proposizione è falsa utilizzeremo il simbolo **F**.

Con le proposizioni e con i valori che possono assumere si costruiscono delle tabelle che si chiamano **tavole di verità**.

PROPOSIZIONI SEMPLICI E COMPLESSE

Distinguiamo fra proposizioni semplici e proposizioni complesse.
Diremo che una proposizione è **semplice** se non è possibile scomporla in parti più semplici per cui sia possibile dire se sono vere o false.
Altrimenti diremo che le proposizioni sono **complesse.**

Esempi:

1. **Il cane ha la coda** è una proposizione semplice, infatti non posso ridurla ulteriormente
2. **Oggi piove e tira il vento** è una proposizione composta dalle due proposizioni:
   Oggi piove
   Oggi tira il vento
3. **O leggo un libro o guardo un film** è una proposizione composta dalle due proposizioni:
   Leggo un libro
   Guardo un film.

GLI ENUNCIATI (O PREDICATI)

Sono delle frasi che contengono qualche variabile e che si trasformano in una proposizione quando si assegnano dei valori alle variabili che vi compaiono.

Esempio: *x è un numero naturale minore di 10*
Se sostituiamo a x il numero 4 otteniamo una proposizione VERA, se invece sostituiamo 15 otteniamo una proposizione FALSA.

Si dice dominio di un enunciato aperto e si indica con D l'insieme dal quale si possono prendere i valori da sostituire alle variabili

Si dice insieme di verità dell'enunciato aperto l'insieme dei valori del dominio che lo rendono vero.

CONNETTIVI

Le proposizioni che abbiamo visto sono dette proposizioni elementari perché non sono scomponibili in altre proposizioni.
Le proposizioni elementari, legate insieme con delle particelle chiamate **connettivi**, formano le proposizioni composte.
I connettivi più importanti sono: **non**, **e**, **o**.

1. **Connettivo «non»**

Il connettivo **non** si può anche trovare nella forma inglese *not*.
Il simbolo è – sopra la lettera che rappresenta la proposizione, ad es. $\bar{p}$.
L'operazione logica associata è la *negazione*.

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Si dice negazione di una proposizione p quella proposizione che è vera se p è falsa, falsa se p è vera.

ESEMPIO

Esempio:
Data la proposizione: **Roma è la capitale d'Italia**
la sua negazione sarà: **Roma non è la capitale d'Italia**
La prima è vera e la seconda è falsa.

CONNETTIVO «e»

2. Connettivo «e»

Il connettivo **e** si può anche trovare nella forma inglese and o nella forma latina et.
Il simbolo è **∧**. L'operazione logica associata è la *congiunzione.*
Si dice congiunzione di due proposizioni p e q quella proposizione che è vera se sono entrambe vere, falsa negli altri casi. La congiunzione di p e q si indica con **p ∧ q**

p	q	$p \wedge q$
V	V	$\boxed{V}$
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ESEMPIO

Esempio:
Data la proposizione: **Se sarai promosso ed avrai la media del 7, ti comprerò il motorino"**
Perché la condizione si verifichi (sia vera), devi contemporaneamente essere promosso e avere la media del 7.

CONNETTIVO «O» - DISGIUNZIONE INCLUSIVA

3. Connettivo «o»

In italiano, la congiunzione «o» viene utilizzata in due modi diversi:

- in senso **inclusivo** (corrispondente al latino *vel o all'inglese or*), come nella frase «*oggi studio matematica o latino*»: in questo caso non si esclude che le due eventualità si verifichino contemporaneamente (*oggi studio sia matematica sia latino*).
  Il simbolo è V. L'operazione logica associata è la *disgiunzione inclusiva*.
  Si dice disgiunzione inclusiva di due proposizioni p e q quella proposizione che è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, falsa negli altri casi.
  La disgiunzione inclusiva di p e q si indica con **p V q**

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	$\boxed{F}$

CONNETTIVO «O» - DISGIUNZIONE ESCLUSIVA

- in senso **esclusivo** (corrispondente al latino *aut* o all'inglese *XOR*), come nella frase «*oggi studio o matematica o latino*»: in questo caso, delle due possibilità se ne può verificare una sola (*non è possibile che oggi io studi, contemporaneamente sia matematica sia latino*).
  La proposizione composta è vera solamente se una sola delle proposizioni componenti è vera.

  Il simbolo è $\dot{\vee}$. L'operazione logica associata è la *disgiunzione esclusiva*
  Si chiama disgiunzione esclusiva perché esclude dal valore di verità il caso in cui entrambe le proposizioni componenti siano vere.

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TAVOLE DI VERITA'

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

Negazione

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Congiunzione

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disgiunzione inclusiva

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disgiunzione esclusiva

QUANTIFICATORI

Un altro modo per ottenere una proposizione da una proposizione aperta è utilizzare i quantificatori.

Esistono due quantificatori:

1. il **quantificatore esistenziale**, indicato con il simbolo $\exists$ che significa "esiste almeno un"
2. il **quantificatore universale** indicato con il simbolo $\forall$ che significa "tutti" o "per ogni".

La proposizione $\exists\, x \in D / p(x)$ si legge "esiste almeno un elemento x appartenente a D tale che p(x)".

La proposizione $\forall\, x \in D,\ p(x)$ si legge "per ogni elemento x appartenente a D, p(x)".

IMPLICAZIONE LOGICA

4. Implicazione logica

Dati due enunciati aperti i(x) e t(x) con $x \in D$, se ogni valore di x che renda vero i(x) rende vero anche t(x) si dice che i(x) **implica logicamente** t(x) e si scrive **i(x) ⇒ t(x)**

Osservazioni

1. i(x) si chiama **ipotesi**, t(x) si chiama **tesi**.
2. i(x) ⇒ t(x) si può anche leggere "se i(x) allora t(x)".
3. i(x) si chiama condizione sufficiente per t(x) e t(x) si chiama condizione necessaria per i(x).

Esempio:

p: «Ho la febbre alta»

q: «Sono malato»

p ⇒ *q*: «Se ho la febbre alta allora sono malato»

EQUIVALENZA LOGICA O BIIMPLICAZIONE LOGICA

- **Biimplicazione logica o doppia implicazione**

Date due proposizioni aperte p(x) e q(x), se per ogni $x \in D$ assumono lo stesso valore di verità si dice che p(x) biimplica logicamente q(x) oppure p(x) equivale logicamente a q(x) e si scrive **$p(x) \Leftrightarrow q(x)$**

Osservazioni

1. $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ si può anche leggere "p(x) se e solo se q(x)" .
2. p(x) si chiama condizione necessaria e sufficiente per q(x) e q(x) si chiama condizione necessaria e sufficiente per p(x).
3. Dire che $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ è come dire $p(x) \Rightarrow q(x)$ e $q(x) \Rightarrow p(x)$

Esempio: *p*: «Ti faccio un regalo» , *q*: «Sei promosso»

$p \Leftrightarrow q$: «Ti faccio un regalo se e solo se sei promosso»

LE TAVOLE DI VERITÀ

Logica

Definizione

Un **enunciato logico** è

una **frase** di cui si può dire **con certezza se è vera o falsa**

Connettivi logici e tavole di verità

CONNETTIVO	Negazione	Congiunzione	Disgiunzione inclusiva	Disgiunzione esclusiva	Implicazione materiale	Coimplicazione materiale
SIMBOLO	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
COME SI LEGGE	**non** A	A **e** B	A **o** B	**o** A **o** B	**se** A **allora** B A **implica** B	A **se e solo se** B

TAVOLA DI VERITÀ
V = Vero
F = Falso

A	$\overline{A}$
V	F
F	V

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \dot{\vee} B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V