MATEMATICA C3
ALGEBRA 1
3. SCOMPOSIZIONI E FRAZIONI

Cobalt123, Wicker Composition
http://www.flickr.com/photos/cobalt/394252539/

1 SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

►1. Cosa significa scomporre in fattori

Scomporre un polinomio in fattori significa scrivere il polinomio come il prodotto di polinomi e monomi che moltiplicati tra loro danno come risultato il polinomio stesso.
La scomposizione in fattori è stata già vista con i numeri naturali quando si è studiato come scrivere un numero come prodotto dei suoi fattori primi.

36	2
18	3
6	3
2	2
1	

Quindi si può dire che $36 = 2^2 3^2$ ed è quindi scomposto come prodotto dei suoi fattori primi.

Il polinomio $3a^3b^2-3ab^4$ si può scomporre in fattori in questo modo $3ab^2(a-b)(a+b)$, infatti eseguendo i prodotti si ottiene $3ab^2(a-b)(a+b)=3ab^2(a^2+ab-ba-b^2)=3ab^2(a^2-b^2)=3a^3b^2-3ab^4$.
La scomposizione termina quando non è possibile scomporre ulteriormente i fattori individuati.
Come per i numeri la scomposizione in fattori dei polinomi identifica il polinomio in maniera univoca (a meno di multipli).

DEFINIZIONE. Un polinomio si dice **riducibile** (scomponibile) se può essere scritto come prodotto di due o più polinomi (detti fattori) di grado maggiore di zero. In caso contrario esso si dirà **irriducibile**.

La caratteristica di un polinomio di essere irriducibile dipende dall'insieme numerico al quale appartengono i coefficienti del polinomio; uno stesso polinomio può essere irriducibile nell'insieme dei numeri razionali ma riducibile in quello dei numeri reali o ancora in quello dei complessi.
Dalla definizione consegue che un polinomio di primo grado è irriducibile.

DEFINIZIONE. La scomposizione in fattori di un polinomio è la sua scrittura come prodotto di fattori irriducibili.

1 Associa le espressioni a sinistra con i polinomi a destra:

$(a+2b)^2$	$2a^2-4ab+3ab-6b^2$
$3ab^2(a^2-b)$	$a^2+4ab+4b^2$
$(2a+3b)(a-2b)$	$9a^2-b^2$
$(3a-b)(3a+b)$	$3a^3b^2-3ab^3$

►2. Raccoglimento totale a fattore comune

Questo è il primo metodo che si deve cercare di utilizzare per scomporre un polinomio. Il metodo si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.
Prendiamo in considerazione il seguente prodotto: $a(x+y+z)=ax+ay+az$. Il nostro obiettivo è ora quello di procedere da destra verso sinistra, cioè avendo il polinomio $ax+ay+az$ come possiamo fare per individuare il prodotto che lo ha generato? In questo caso semplice possiamo osservare che i tre monomi contengo tutti la lettera *a*, che quindi si può mettere in comune, o come anche si dice "in evidenza". Perciò scriviamo $ax+ay+az=a(x+y+z)$.

Esempio

$3a^2b(2a^3-5b^2-7c)$

$= 3a^2b(2a^3)+3a^2b(-5b^2)+3a^2b(-7c)= 6a^5b-15a^2b^3-21a^2bc$

L'ultima uguaglianza, letta da destra verso sinistra, è il raccoglimento totale a fattore comune.

Partendo da $6a^5b-15a^2b^3-21a^2bc$ possiamo notare che i coefficienti numerici 6, 15 e 21 hanno il 3 come fattore in comune. Notiamo anche che la lettera a è in comune, come la lettera b. Raccogliendo tutti i fattori comuni si avrà il prodotto di partenza $3a^2b(2a^3-5b^2-7c)$.

Procedura per mettere in evidenza il fattore comune

1.Trovare il M.C.D. di tutti i termini che formano il polinomio: tutti i fattori in comune con l'esponente minimo con cui compaiono.

2. Scrivere il polinomio come prodotto del M.C.D. per il polinomio ottenuto, dividendo ciascun monomio del polinomio di partenza per il M.C.D.

3. Verificare la scomposizione eseguendo la moltiplicazione per vedere se il prodotto dà come risultato il polinomio da scomporre.

Esempio

$10x^5y^3z-15x^3y^5z-20x^2y^3z^2$

Trovo tutti i fattori comuni con l'esponente minore per formare il M.C.D

$M.C.D. = 5x^2y^3z$

Divido ciascun termine del polinomio per $5x^2y^3z$:

$10x^5y^3z : 5x^2y^3z=2x^3$

$-15x^3y^5z : 5x^2y^3z=-3xy^2$

$-20x^2y^3z^2 : 5x^2y^3z=-4z$

Il polinomio si può allora scrivere come

$5x^2y^3z\cdot(2x^3-3xy^2-4z)$

Il fattore da raccogliere a fattore comune può essere scelto con il segno "+" o con il segno "-". Nell'esempio precedente è valida anche la seguente scomposizione:

$10x^5y^3z-15x^3y^5z-20x^2y^3z^2 = -5x^2y^3z\cdot(-2x^3+3xy^2+4z)$

Esempio

$5a^2x^2-10ax^5$

Tra i coefficienti numerici il fattore comune è 5.

Tra la parte letterale sono in comune le lettere a e x, la a con esponente 1, la x con esponente 2.

$M.C.D. = 5ax^2$

Passiamo quindi a scrivere

$5a^2x^2-10ax^5=5ax^2(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Nella parentesi vanno i monomi che si ottengono dalle divisioni

$5a^2x^2:5ax^2=a$

$-10ax^5=5ax^2=-2x^3$

In definitiva

$5a^2x^2-10ax^5=5ax^2(a-2x^3)$

Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune

2	$ax+3a^2x-abx$	$15b^2+12bc+21abx+6ab^2$
3	$91m^5n^3+117m^3n^4$	$-5a^2+10ab^2-15b$
4	ab^2-a+a^2	$2b^6+4b^4-b^9$
5	$2a^2b^{2x}-4a^2b$	$15x^2y-10xy+25x^2y^2$
6	$-3a^2b^2+6ab^2-15b$	ab^2-a+a^2
7	$2b^6+4b^4-b^9$	$-5a^4-10a^2-30a$
8	$-a^2b^2-a^3b^5+b^3$	$-2x^6+4x^5-6x^3y^9$
9	$-a^4-a^3-a^5$	$-12a^8b^9-6a^3b^3-15a^4b^3$

10 $-2x^2z^3+4z^5-6x^3z^3$ $\quad$ $-\frac{4}{9}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3$

11 $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a$ $\quad$ $\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{6}a^3b^2$

12 $a^n+a^{n+1}+a^{n+2}$ $\quad$ $a^n+a^{n-1}+a^{n-2}$

13 $a^n+a^{2n}+a^{3n}$ $\quad$ $2ab^2+2b^2c-2a^2b^2-2ab^2c$

Esempio

$6a(x-1)+7b(x-1)$

Il fattore comune è $(x-1)$, quindi il polinomio si può scrivere come

$(x-1)\cdot[\ldots\ldots..]$

nella parentesi quadra scriviamo i termini che si ottengono dalle divisioni

$6a(x-1):(x-1)=6a$

$7b(x-1):(x-1)=7b$

In definitiva

$6a(x-1)+7b(x-1)=(x-1)(6a+7b)$

Esempio

$10(x+1)^2-5a(x+1)$

Il fattore comune è $5(x+1)$, quindi possiamo cominciare a scrivere

$5(x+1)\cdot[\ldots\ldots\ldots..]$, nella parentesi quadra mettiamo i termini che si ottengono dalla divisione

$10(x+1)^2:5(x+1)=2(x+1)$

$-5a(x+1):5(x+1)=a$

In definitiva

$10(x+1)^2-5a(x+1)=5(x+1)[2(x+1)-a]$

013 $a(x+y)-b(x+y)$ $\quad$ $3x^2(a+b)-2x^3(a+b)+5x^5(a+b)$

014 $(x+y)^3-(x+y)^2$ $\quad$ $x^2(a+b)^3+x^3(a+b)+x^5(a+b)^2$

015 $5y^3(x-y)^3-3y^2(x-y)$ $\quad$ $5a(x+3y)-3(x+3y)$

►3. Raccoglimento parziale a fattore comune

Quando un polinomio non ha alcun fattore comune a tutti i suoi termini, possiamo provare a mettere in evidenza tra gruppi di monomi e successivamente individuare il polinomio in comune.

Osserviamo il prodotto $(a+b)(x+y+z)=ax+ay+az+bx+by+bz$.

Supponiamo ora di avere il polinomio $ax+ay+az+bx+by+bz$ come possiamo fare a tornare indietro per scriverlo come prodotto di polinomi?

Esempio

Scomporre in fattori il polinomio $ax+ay+az+bx+by+bz$

Non c'è nessun fattore comune a tutto il polinomio.

Proviamo a mettere in evidenza per gruppi di termini. Evidenziamo tra i primi tre termini e b tra gli ultimi tre, avremo:

$a(x+y+z)+b(x+y+z)$

Ora risulta semplice vedere che il trinomio $(x+y+z)$ è in comune e quindi lo possiamo mettere in evidenza

$ax+ay+az+bx+by+bz=a(x+y+z)+b(x+y+z)=(x+y+z)(a+b)$.

Procedura per eseguire il raccoglimento parziale

1. Dopo aver verificato che non è possibile effettuare un raccoglimento a fattore comune totale raggruppo i monomi in modo che in ogni gruppo sia possibile mettere in comune qualche fattore;

2. Verifico se la nuova scrittura del polinomio ha un polinomio (binomio, trinomio...) comune a tutti i termini.

3. Se è presente il fattore comune a tutti i termini lo metto in evidenza;

4. Se il fattore comune non è presente la scomposizione è fallita, allora posso provare a raggruppare diversamente i monomi o abbandonare questo metodo.

Esempio

$ax+ay+bx+ab$

I quattro monomi non hanno fattori in comune. Provo a mettere in evidenza la *a* nel primo e secondo termine e la *b* nel terzo e quarto termine

$ax+ay+bx+ab = a(x+y)+b(x+a)$

In questo caso non c'è nessun fattore comune: il metodo è fallito. In effetti il polinomio non si può scomporre in fattori.

Esempio

$bx-2ab+2ax-4a^2$

Non vi sono fattori da mettere a fattore comune totale, proviamo con il raccoglimento parziale:

$\underline{bx}\underline{-2ab}\underline{\underline{+2ax}}\underline{\underline{-4a^2}} = b(\underline{x-2a})+2a(\underline{x-2a}) = (x-2a)(b+2a)$

Esempio

$bx^3+2x^2-bx-2+abx+2a$

Raggruppiamo nel seguente modo $\underline{bx^3}\underline{\underline{+2x^2}}\underline{-bx}\underline{\underline{-2}}\underline{+abx}\underline{\underline{+2a}}$

tra quelli con sottolineatura semplice metto a fattore comune *bx*, tra quelli con doppia sottolineatura metto a fattore comune *2*.

$\underline{bx^3}\underline{\underline{+2x^2}}\underline{-bx}\underline{\underline{-2}}\underline{+abx}\underline{\underline{+2a}} = bx(\underline{x^2-1+a})+2(\underline{x^2-1+a}) = (x^2-1+a)(bx+2)$

Scomponi in fattori mediante raccoglimento parziale a fattore comune, se questo è possibile.

014	$ax+bx-ay-by$	$2x-2y+ax-ay$
015	$3ax-6a+x-2$	ax^3+ax^2+ax+a
016	$3ax-6a-x+2$	$3ax-6a-x-2$
017	$-x^3+x^2+x-1$	x^3-x^2+x-1
018	x^3+x^2-x-1	$x^3-1-x+x^2$
019	$x^3-x-1+x^2$	x^3+x^2+x+1
020	$ax^3y+ax^2y+axy+ay$	$3x^3-3x^2+3x-3$
021	$\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x-1$	$b^2x+b^2y+2bx+2by$
022	$b^2x-b^2y+2bx-2by$	$b^2x-b^2y-2bx-2by$
023	$b^2x+b^2y-2bx-2by$	$b^2x-2bx-2by+b^2y$
024	$ay+2x^3-2ax^3-y$	$xy+x+ay+a+by+b$
025	$3x+6+ax+2a+bx+2b$	$2x-2+bx-b+ax-a$
025	$2x-2+bx-b-ax+a$	$2x+2+bx-b-ax+a$
027	$3ax+6a+a^2x+2a^2+abx+2ab$	$2x-b+ax-a-2+bx$
028	$bx^2-bx+b+x^2-x+1$	$2^{11}x^2+2^{12}x+2^{15}x+2^{16}$
029	$3(x+y)^2+5x+5y$	$(a-2)(a-3)+ab-2b$
030	a^3+2a^2+a+2	$a^2x+ax-a-1$
031	$3xy^3-6xy-ay^2+2a$	$a^2x^3+a^2x^2+a^2x-2x^2-2x-2$

Esempio

$$5ab^2-10abc-25abx+50acx$$

Il fattore comune è *5a*, quindi

$$5ab^2-10abc-25abx+50acx=5a(b^2-2bc-5bx+10cx)$$

Vediamo se è possibile scomporre il polinomio in parentesi con un raccoglimento parziale

$$5a(\underline{b^2-2bc}\,\underline{-5bx+10cx})=5a[b(\underline{b-2c})-5x(\underline{b-2c})]=5a(b-2c)(b-5x) \quad .$$

Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale, come nell'esempio precedente.

32 $2ab^2+2b^2c-2a^2b^2-2ab^2c$

33 $6x^2+6xy-3x(x+y)-9x^2(x+y)^2$

34 $x^4+x^3-x^2-x$

35 $\frac{2}{3}ax^3-\frac{1}{3}ax^2+\frac{2}{3}ax-\frac{1}{3}a$

36 $15x(x+y)^2+5x^2+5xy$

37 $\frac{7}{3}x^2-\frac{7}{3}xy+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2y-\frac{5}{9}(x^2-xy)$

38 $2bx^2+4bx-2x^2-4ax$

39 $2a^{2mx}-2ma^2-2a^2x+2a^2$

40 $2b(x+1)^2-2bax-2ba+4bx+4b$

2. RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

Uno dei metodi più usati per la scomposizione di polinomi è legato al saper riconoscere i prodotti notevoli.

►1 Quadrato di un binomio

Se abbiamo un trinomio costituito da due termini che sono quadrati di due monomi ed il terzo termine è uguale al doppio prodotto degli stessi due monomi, allora il trinomio può essere scritto sotto forma di quadrato di un binomio, secondo la regola che segue.

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

Analogamente nel caso in cui il monomio che costituisce il doppio prodotto sia negativo:

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad \rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$

Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, valgono anche le seguenti uguaglianze.

$$(A+B)^2 = (-A-B)^2 \quad \rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 = (-A-B)^2$$
$$(A-B)^2 = (-A+B)^2 \quad \rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 = (-A+B)^2$$

Esempi

$4a^2+12ab^2+9b^4$

Notiamo che il primo ed il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di $2a$ e di $3b^2$, ed il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi, pertanto possiamo scrivere:

$4a^2+12ab^2+9b^4 = (2a)^2 + 2\cdot(2a)\cdot(3b^2) + (3b^2)^2 = (2a+3b^2)^2$.

x^2-6x+9

Il primo ed il terzo termine sono quadrati, il secondo termine compare con il segno “meno”. Dunque:

$x^2-6x+9 = x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2 = (x-3)^2$ *ma anche* $=(-x+3)^2$.

Può accadere che tutti e tre i termini siano tutti quadrati:

x^4+4x^2+4

è formato da tre quadrati, ma il secondo termine, quello di grado intermedio, è anche il doppio prodotto dei due monomi di cui il primo ed il terzo termine sono i rispettivi quadrati. Si ha dunque:

$x^4+4x^2+4 = (x^2)^2+2\cdot(2)\cdot(x^2)+(2)^2 = (x^2+2)^2$.

Procedura per individuare il quadrato di un binomio

1. **individuare le basi dei due quadrati;**
2. **verificare se il terzo termine è il doppio prodotto delle due basi;**
3. **scrivere tra parentesi le basi dei due quadrati e il quadrato fuori dalla parentesi**
4. **mettere il segno “più” o “meno” in accordo al segno del termine che non è un quadrato.**

41 $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2 = \left(\frac{1}{2}a+b\right)^2$

042 $\frac{4}{9}a^4-4a^2+9 = \left(\frac{2}{3}a^2-3\right)^2$

043 $100+a^2b^4+20ab^2 = (10+ab^2)^2$

044 $16a^2+\frac{1}{4}b^2-4ab = \left(4a-\frac{1}{2}b\right)^2$

Può capitare che i quadrati compaiano con il coefficiente negativo, ma si può rimediare mettendo in evidenza il segno “meno”.

Esempi

- $-9a^2+12ab-4b^2$

Mettiamo -1 a fattore comune

$-9a^2+12ab-4b^2=-(9a^2-12ab+4b^2)=-(3a-2b)^2$

- $-x^4-x^2-\frac{1}{4}$

$=-\left(x^4+x^2+\frac{1}{4}\right)=-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2$

- $-x^2+6xy^2-9y^4$

$=-(x^2-6xy^2+9y^4)=-(x-3y^2)^2$

Possiamo avere un trinomio che non è il quadrato di un binomio ma lo "diventa" dopo aver messo in evidenza qualche fattore comune.

Esempi

- $2a^3+10a^2+50a$

Mettiamo a fattore comune 2a

$2a^3+20a^2+50a=2a(a^2+10a+25)=2a(a+5)^2$

- $2a^2+4a+2=2(a^2+2a+1)=2(a+1)^2$

- $-12a^3+12a^2-3a=-3a(4a^2-4a+1)=-3a(2a-1)^2$

- $\frac{3}{8}a^2+3ab+6b^2=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}a^2+2ab+4b^2\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^2$

o anche

$\frac{3}{8}a^2+3ab+6b^2=\frac{3}{8}(a^2+8ab+16b^2)=\frac{3}{8}(a+4b)^2$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio:

45 $4x^2+4xy+y^2$ $\quad$ $a^4+36a^2+12a^3$

46 $x^2-6xy+9y^2$ $\quad$ $-x^2-6xy-9y^2$

47 $25+10x+x^2$ $\quad$ $25+10x+x^2$

48 $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}$ $\quad$ $\frac{9}{25}a^4-6a^2+25$

49 $4x^2+2x^4+1$ $\quad$ $4x^2-4x^4-1$

50 $-a^3-2a^2-a$ $\quad$ $3a^7b-6a^5b^2+3a^3b^3$

51 $-9x^2-\frac{1}{4}+3x$ $\quad$ $2x^{13}-8x^8y+8x^3y^2$

52 $x^8+8x^4y^2+16y^4$ $\quad$ $-x^2+6xy+9y^2$

53 $4a^2b^4-12ab^3+9b^6$ $\quad$ a^2+a+1

54 $36a^6b^3+27a^5b^4+12a^7b^2$ $\quad$ $25x^{14}+9y^6+30x^7y^3$

55 $-a^7-25a^5+10a^6$ $\quad$ $25a^2+49b^2+35ab$

56 $4x^2+4xy-y^2$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

57 $x^2-6xy+9y$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

58 $25+100x+x^2$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

59 $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

60 $-9x^2-\frac{1}{4}-6x$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

►2 Quadrato di un polinomio

Se siamo in presenza di sei termini, tre dei quali sono quadrati, verifichiamo se il polinomio è il quadrato di un trinomio:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \quad \rightarrow$$
$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A+B+C)^2 = (-A-B-C)^2$$

Notiamo che i doppi prodotti possono essere tutt'e tre positivi, oppure uno positivo e due negativi: indicano se i rispettivi monomi sono concordi o discordi.

Esempio

$16a^4+b^2+1+8a^2b+8a^2+2b$

I primi tre termini sono quadrati, rispettivamente di $4a^2$ b 1, si può verificare poi che gli altri tre termini sono i doppi prodotti:

$16a^4+b^2+1+8a^2b+8a^2+2b = (4a^2+b+1)^2$

Esempio

$x^4+y^2+z^2-2x^2y-2x^2z+2yz = (x^2-y-z)^2 = (-x^2+y+z)^2$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un trinomio

61 $x^2+y^2+4+4x+2xy+4y$

62 $4a^4-6ab-4a^2b+12a^3+b^2+9a^2$

63 $9x^6+2y^2z+y^4-6x^3z-6x^3y^2+z^2$

64 $a^2+2ab+b^2-2a+1-2b$

65 $\frac{1}{4}a^2+b^4+c^6+ab^2+ac^3+2b^2c^3$

66 $-x^2-2xy-9-y^2+6x+6y$

67 $a^2+b^2+c^2-2ac-bc+2ab$

68 $x^2+\frac{1}{4}y^2+4-xy+4x-2y$

In alcuni casi anche un polinomio di cinque termini può essere il quadrato di un trinomio. Vediamo un esempio particolare:

Esempio

$x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

Per far venire fuori il quadrato del trinomio si può scindere il termine $3x^2$ come somma $3x^2=x^2+2x^2$, in questo modo si ha:

$x^4-2x^3+3x^2-2x+1 = x^4-2x^3+x^2+2x^2-2x+1 = (x^2-x+1)^2$

69 $4a^4+8a^2+1+8a^3+4a$ suggerimento: scomponi $8a^2=4a^2+4a^2$

70 $9x^4+6x^3-11x^2-4x+4$ suggerimento: scomponi in maniera opportuna $-11x^2$

71 $2a^{10}x+4a^8x+2a^6x+4a^5x+4a^3x+2x$

Nel caso di un quadrato di un polinomio la regola è sostanzialmente la stessa:

$$(A+B+C+D)^2=A^2+B^2+C^2+D^2+2AB+2AC+2AD+2BC+2BD+2CD$$

72 $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$

73 $x^6+x^4+x^2+1+2x^5+2x^4+2x^3+2x^3+2x^2+2x$

►3 Cubo di un binomio

I cubi di binomi sono di solito facilmente riconoscibili. Un quadrinomio è lo sviluppo del cubo di un binomio se due suoi termini sono i cubi di due monomi e gli altri due termini sono i tripli prodotti tra uno dei due monomi ed il quadrato dell'altro, secondo le seguenti formule.

$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \quad \rightarrow \quad A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$$
$$(A-B)^3 = A^3-3A^2B+3AB^2-B^3 \quad \rightarrow \quad A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=(A-B)^3$$

Per il cubo non si pone il problema, come per il quadrato, del segno della base, perché un numero, elevato ad esponente dispari, se è positivo rimane positivo, se è negativo rimane negativo.

Esempi

- $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

Notiamo che il primo ed il quarto termine sono cubi, rispettivamente di *2a* e di *b* , il secondo termine è il triplo prodotto tra il quadrato di *2a* e *b*, mentre il terzo termine è il triplo prodotto tra *2a* e il quadrato di *b* . Abbiamo dunque:
$8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3 = (2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(b)+3\cdot(2a)\cdot(b)^2 = (2a+b)^3$.

- $-27x^3+27x^2-9x+1$

Le basi del cubo sono il primo e il quarto termine, rispettivamente cubi di *-3x* e di *1*. Dunque:
$-27x^3+27x^2-9x+1 = (-3x)^3+3\cdot(-3x)^2\cdot1+3\cdot(-3x)\cdot1^2+1 = (-3x+1)^3$

- $x^6-x^4+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{27} = \left(x^2-\frac{1}{3}\right)^3$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio

74 $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$ $\qquad$ $b^3+12a^2b-6ab^2-8a^3$

75 $-12a^2+8a^3-b^3+6ab$ $\qquad$ $-12a^2b+6ab+8a^3-b^3$

76 $-x^3+6x^2-12x+8$ $\qquad$ $-x^9-3x^6+3x^3+8$

77 $x^3y^6+1+3x^2y^2+3xy^2$ $\qquad$ $x^3+3x-3x^2-1$

78 $-5x^5y^3-5x^2-15x^4y^2-15x^3y$ $\qquad$ $-a^6+27a^3+9a^5-27a^4$

79 $64a^3-48a^2+12a-1$ $\qquad$ $a^6+9a^4+27a^2+27$

80 $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$ $\qquad$ $0{,}001x^6+0{,}015x^4+0{,}075x^2+0{,}125$

81 $a^{10}-8a-6a^7+12a^4$

82 $27a^3-b^3+9a^2b-9ab^2$ non è i cubo del binomio perché … … … … … … … …

►4 Differenza di due quadrati

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2 \quad \rightarrow \quad A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)$$

Un binomio che sia la differenza dei quadrati di due monomi può essere scomposto come prodotto tra la somma dei due monomi (basi dei quadrati) e la loro differenza.

Esempi

- $\frac{4}{9}a^4-25b^2=\left(\frac{2}{3}a^2\right)^2-(5b)^2=\left(\frac{2}{3}a^2+5b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a^2-5b\right)$
- $-x^6+16y^2=-(x^3)^2+(4y)^2=(x^3+4y)\cdot(-x^3+4y)$

Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati

083	a^2-25b^2	$16-x^2y^2$	$4a^4-9b^2$
084	$a^2b^4-c^2$	$4x^6-9y^4$	$-36x^8+25b^2$
085	$-1+a^2$	$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}y^4$	$\frac{a^2}{4}-\frac{y^2}{9}$
086	$2a^2-50$	a^3-16ab^6	$-4x^2y^2+y^2$
087	$-4a^2+b^2$	$25x^2y^2-\frac{1}{4}z^6$	$-a^2b^4+49$
088	$16y^4-z^4$	a^8-b^8	a^4-16
089	$16a^2-9b^2$	$-4x^8+y^{12}$	$\frac{1}{4}x^2-0{,}01\,y^4$

La formula precedente vale anche se *A* e *B* sono polinomi.

Esempi

- $a^2-(x+1)^2=[a+(x+1)]\cdot[a-(x+1)]=(a+x+1)(a-x-1)$
- $(2a-b^2)^2-(4x)^2=(2a-b^2+4x)\cdot(2a-b^2-4x)$
- $(a+3b)^2-(2x-5)^2=(a+3b+2x-5)\cdot(a+3b-2x+5)$

Per questo tipo di scomposizioni, la cosa più difficile è riuscire a riconoscere un quadrinomio o un polinomio di sei termini come differenza di quadrati. Riportiamo i casi principali:

- $(A+B)^2-C^2=A^2+2AB+B^2-C^2$
- $A^2-(B+C)^2=A^2-B^2-2BC-C^2$
- $(A+B)^2-(C+D)^2=A^2+2AB+B^2-C^2-2CD-D^2$

Esempio

$4a^2-4b^2-c^2+4bc$

Gli ultimi tre termini possono essere raggruppati per formare il quadrati di un binomio.

$=4a^2-(4b^2+c^2-4bc)$

$=(2a)^2-(2b-c)^2$

$=(2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c)$

$4a^2-4b^2-c^2+4bc=4a^2-(4b^2+c^2-4bc)=(2a)^2-(2b-c)^2=(2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c)$

Esempi

- $4x^4-4x^2-y^2+1$

$=\left(2x^2-1\right)^2-(y)^2=\left(2x^2-1+y\right)\cdot\left(2x^2-1-y\right)$

- $a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2$

$=\left(a^2+1+2a\right)-\left(b^2+9c^2-6bc\right)=(a+1)^2-(b-3c)^2=(a+1+b-3c)\cdot(a+1-b+3c)$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati:

90 $(b+3)^2-x^2$ $\quad$ $a^8-(b-1)^2$

91 $(x-y)^2-(y+z)^2$ $\quad$ $-(2a-1)^2+(3b+3)^2$

92 x^2-b^2-9-6b $\quad$ b^2-x^4+1+2b

93 $a^4+4a^2+4-y^2$ $\quad$ x^2-y^2-1+2y

94 $-(a+1)^2+9$ $\quad$ $16x^2y^6-(xy^3+1)^2$

95 $a^2+1+2a-9$ $\quad$ $x^2y^4-z^2+9+6xy^2$

Scomporre i polinomi seguenti ricordando le regole sui prodotti notevoli

96 x^2-2x+1 $\quad$ $x^2+y^2+z^4-2xy+2xz^2-2yz^2$

97 $a^6+b^9+3a^4b^3+3a^2b^6$ $\quad$ $a^3-6a^2+12a-8$

98 $a^2+b^2-1-2ab$ $\quad$ $a^4+2b-1-b^2$

99 $-8a^2b+24ab^2-18b^3$ $\quad$ $6a^5-24ab^4$

100 $a^4+b^4-2a^2b^2$ $\quad$ $4x^2-9y^2-6yz^2-z^4$

101 $\frac{1}{8}a^4b^2-\frac{3}{4}a^3b^3+\frac{3}{2}a^2b^4-ab^5$ $\quad$ $a^2+4ab+4b^2-x^2+2xy-y^2$

102 $a^3x+4a^{2x}+4ax$ $\quad$ R. $ax(a+2)^2$

103 $a^3b^5-\frac{2}{3}a^2b^6+\frac{1}{9}ab^7$ $\quad$ R. $ab^3\left(ab-\frac{1}{3}b^2\right)^2$

104 $+2a^2+4ab-3a+2b^2+9$ $\quad$ R. $(a-3)(a-x-6)$

105 $8ab^2-2a^3$ $\quad$ R. $-2a(a+2b)(a-2b)$

106 $a^4-6a^3+3a^2+18a+9-1$ $\quad$ R. $(a^2-3a-4)(a^2-3a-2)$

107 $a^3+3a^2b+a^2+3ab^2+2ab+b^3+b^2$ $\quad$ R. $(a+b)^2(a+b+1)$

108 $\frac{x^7}{3}+x^5+x^3+\frac{x}{3}$ $\quad$ R. $\frac{1}{3}x(x^2+1)^3$

3. ALTRE TECNICHE DI SCOMPOSIZIONE

►1. Trinomi particolari

Consideriamo il seguente prodotto:

$$(x+3)(x+2) = x^2+3x+2x+6 = x^2+5x+6$$

Poniamoci ora l'obiettivo opposto: se abbiamo il polinomio x^2+5x+6 come facciamo a trovare ritrovare il prodotto che lo ha originato? Possiamo notare che il 5 deriva dalla somma tra il 3 e il 2, mentre il 6 deriva dal prodotto tra 3 e 2. Generalizzando

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2+ax+bx+ab = x^2+(a+b)x+a\cdot b$$

Leggendo la formula precedente da destra verso sinistra:

$$x^2+(a+b)x+a\cdot b = (x+a)\cdot(x+b).$$

Possiamo allora concludere che se abbiamo un trinomio di secondo grado in una sola lettera, a coefficienti interi, avente il termine di secondo grado con coefficiente 1, se riusciamo a trovare due numeri *a* e *b* tali che la loro somma è uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il loro prodotto è uguale al termine noto, allora il polinomio è scomponibile nel prodotto $(x+a)(x+b)$.

Osserva che il termine noto, poiché è dato dal prodotto dei numeri che cerchiamo, ci dice se i due numeri sono concordi o discordi. Inoltre, se il numero non è particolarmente grande è sempre possibile scrivere facilmente tutte le coppie di numeri che danno come prodotto il numero cercato, tra tutte queste coppie dobbiamo poi individuare quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

Esempi

- $x^2+7x+12$

I coefficienti sono positivi e quindi i due numeri da trovare sono entrambi positivi.
Il termine noto 12 può essere scritto sotto forma di prodotto di due numeri solo come:

$$12\cdot1 \qquad 6\cdot2 \qquad 3\cdot4$$

Le loro somme sono rispettivamente 13, 8, 7. La coppia di numeri che dà per somma +7 e prodotto +12 è pertanto +3 e +4. Dunque il trinomio si scompone come:
$x^2+7x+12=(x+4)\cdot(x+3)$.

- $x^2-\overset{somma}{8x}+\overset{prodotto}{15}$

I segni dei coefficienti ci dicono che i due numeri, dovendo avere somma negativa e prodotto positivo, sono entrambi negativi. Dobbiamo cercare due numeri negativi la cui somma sia -8 e il cui prodotto sia 15. Le coppie di numeri che danno 15 come prodotto sono -15; -1 e -5; -3. Allora i due numeri cercati sono –5 e –3. Il trinomio si scompone come:
$x^2-8x+15=(x-5)\cdot(x-3)$.

- $x^2+\overset{somma}{4}x-\overset{prodotto}{5}$

I due numeri sono discordi, il maggiore in valore assoluto è quello positivo. C'è una sola coppia di numeri che dà -5 come prodotto, precisamente +5 e –1. Il polinomio si scompone:
$x^2+4x-5=(x+5)\cdot(x-1)$.

- $x^2-\overset{S}{3}x-\overset{P}{10}$

I due numeri sono discordi, in modulo il più grande è quello negativo. Le coppie di numeri che danno -10 come prodotto sono -10; +1, ma anche -5; +2. Quelli che danno -3 come somma sono –5 e + 2.
$x^2-3x-10=(x-5)\cdot(x+2)$.

109	$x^2-5x-36$	$x^2-17x+16$
110	x^2+6x+8	$x^2+7x+12$
111	$x^2+9x+18$	x^2-5x+6
112	$x^2-7x+12$	x^2-6x+8
113	x^2-3x-4	$x^2+5x-14$
114	$x^2+4x-12$	x^2-3x+2
115	$x^2+3x-10$	$x^2+13x+12$
116	$x^2-13x+12$	x^2-2x-3
117	x^2-8x-9	$x^2-51x+50$
118	x^4+8x^2+12	x^4-5x^2+4

In alcuni casi si può applicare questa regola anche quando il trinomio non è di secondo grado, è necessario però che il termine di grado intermedio sia esattamente di grado pari alla metà di quello di grado maggiore. Vediamo qualche esempio.

Esempi

- $x^4+5x^2+6=(x^2+3)\cdot(x^2+2)$
- $x^6+x^3-12=(x^3+4)\cdot(x^3-3)$
- $a^4-10a^2+9=(a^2-9)\cdot(a^2-1)=(a+3)\cdot(a-3)\cdot(a+1)\cdot(a-1)$

Nell'ultimo esempio, dopo aver applicato il metodo del trinomio particolare, siamo stati ricondotti a due differenze di quadrati, ed abbiamo quindi completato la scomposizione.

Esempi

- $-x^4-x^2+20=-(x^4+x^2-20)=-(x^2+5)\cdot(x^2-4)=-(x^2+5)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$.
- $2x^5-12x^3-14x=2x\cdot(x^4-6x^2-7)=2x\cdot(x^2-7)\cdot(x^2+1)$
- $-2a^7+34a^5-32a^3=-2a^3\cdot(a^4-17a^2+16)=-2a^3\cdot(a^2-1)\cdot(a^2-16)=-2a^3\cdot(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a-4)(a+4)$

Quando è possibile, scomponi in fattori, ricordando le regole sul trinomio particolare:

119	x^6-5x^3+4	$x^2+5x-36$
120	x^2+8x+7	$x^2+4x-45$
121	$x^2-10x+24$	x^4+11x^2+24
122	x^4+9x^2-10	x^6-x^3-30
123	$2x^3+14x^2+20x$	$-3x^6+15x^4-12x^2$
124	$x^{20}+4x^{12}-32x^4$	x^4-x^2-20
125	$-x^6+7x^3-10$	x^4-37x^2+36

E' possibile applicare questo metodo anche quando il polinomio è in due variabili, purché però siano opportunamente disposte.

Esempio

$x^2+5xy+6y^2$

Per capire come applicare la regola precedente, possiamo scrivere il trinomio in questo modo:

$x^2+\overset{somma}{5y}\,x+\overset{prodotto}{6y^2}$

Bisogna cercare due monomi *A* e *B* tali che $A+B=5y$ e $A\cdot B=6y^2$. Partendo dal fatto che i due numeri che danno 5 come somma e 6 come prodotto sono +3 e +2, i monomi cercati sono +3y e +2y, infatti $+3y+3y=+5y$ e $+3y\cdot(+2y)=+6y^2$. Pertanto si può scomporre come segue:

$x^2+5xy+6y^2=(x+3y)(x+2y)$.

126	$x^2+4xy-32y^2$	$a^2-ax-20x^2$
127	$a^2-12xa-64x^2$	$m^2+20mn+36n^2$
128	$x^4-8x^2a+12a^2$	$x^6+9x^3y^2-36y^4$
129	$x^2y^2-2xy-35$	$a^4b^2-a^2b-72$

La regola, opportunamente modificata, vale anche se il primo coefficiente non è 1. Vediamo un esempio:

Esempio

$2x^2-x-1$

Non possiamo applicare la regola del trinomio caratteristico, con somma e prodotto; con un accorgimento, possiamo riscrivere il polinomio in un altro modo. Cerchiamo due numeri la cui somma sia -1 e il prodotto sia pari al prodotto tra il primo e l'ultimo coefficiente, o meglio tra il coefficiente del termine di secondo grado e il termine noto, in questo caso $2\cdot(-1)=-2$. I numeri sono -2 e +1, spezziamo il monomio centrale in somma di due monomi in questo modo

$2x^2-x-1=2x^2-2x+x-1$

Ora possiamo applicare il raccoglimento a fattore comune parziale

$2x^2-x-1=2x^2\underbrace{-2x+x}_{-x}-1=2x\cdot\underline{(x-1)}+1\cdot\underline{(x-1)}=(x-1)\cdot(2x+1)$.

Procedura generale

Sia da scomporre un trinomio di secondo grado a coefficienti interi $ax^2+bx+c\ \ con\ \ a\neq 1$, cerchiamo due numeri m ed n tali che $m+n=b\ \ e\ \ m\cdot n=a\cdot c$; se riusciamo a trovarli, li useremo per dissociare il coefficiente b e riscrivere il polinomio nella forma $p=ax^2+(m+n)\cdot x+c$ su cui poi eseguire un raccoglimento parziale.

Scomponete i seguenti polinomi con la regola descritta seguendo la traccia:

130 $2x^2-3x-5=2x^2+x\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots)-5\ =\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

131 $3y^2+y-10=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

132 $5t^2-11t+2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

133 $-3t^2+4t-1=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

134	$3a^2-4a+1$	$11k-6k^2+7$
135	$4b^2-4b-3$	$6x^2-13x-15$
136	$x^2+10ax+16a^2$	$2x^4+x^2-3$

►2. Scomposizione con la regola Ruffini

Anche il teorema di Ruffini permette di scomporre in fattori i polinomi. Dato il polinomio *P(x)*, se riusciamo a trovare un numero *k* per il quale *P(k)=0* allora *P(x)* è divisibile per il binomio x-k, allora possiamo scomporre $P(x)=(x-k)\cdot Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione tra *P(x)* e *(x-k)*.
Il problema di scomporre un polinomio P(x) si riconduce quindi a quello della ricerca del numero k che sostituito alla x renda nullo il polinomio. Un numero di questo tipo si dice anche **radice del polinomio**.
Il numero k non va cercato del tutto a caso, abbiamo degli elementi per restringere il campo di ricerca di questo numero quando il polinomio è a coefficienti interi.
Le radici intere del polinomio vanno cercate tra i divisori del termine noto.

Esempio

$p(x)=x^3+x^2-10x+8$

Le radici intere del polinomio sono da ricercare nell'insieme dei divisori di 8, precisamente in $\{\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 8\}$. Sostituiamo questi numeri nel polinomio, finché non troviamo quello che lo annulla.
Per *x=1* si ha $p(1)=(1)^3+(1)^2-10\cdot(1)+8=1+1-10+8=0$, pertanto il polinomio è divisibile per x-1.
Utilizziamo la regola di Ruffini per dividere P(x) per x-1.

Predisponiamo una griglia come quella che segue, al primo rigo mettiamo i coefficienti di P(x), al secondo rigo mettiamo come primo numero la radice che abbiamo trovato, cioè 1. Poi procediamo come abbiamo già indicato per la regola di Ruffini.

	1	1	-10	8
1		1	2	-8
	1	2	-8	

I numeri che abbiamo ottenuto nell'ultimo rigo sono i coefficienti del polinomio quoziente:
$q(x)=x^2+2x-8$.
Possiamo allora scrivere:
$x^3+x^2-10x+8=(x-1)\cdot(x^2+2x-8)$.
Per fattorizzare il polinomio di secondo grado x^2+2x-8 possiamo ricorrere al metodo del trinomio notevole. Cerchiamo due numeri la sui somma sia +2 e il cui prodotto sia -8. Questi numeri vanno cercati tra le coppie che danno per prodotto -8 e precisamente tra le seguenti coppie (+8, -1), (-8, +1), (+4, -2), (-4, +2). La coppia che dà per somma +2 è (+4, -2). In definitiva si ha:
$x^3+x^2-10x+8=(x-1)\cdot(x^2+2x-8)=(x-1)(x-2)(x+4)$.

<u>Esempio</u>

$x^4-5x^3-7x^2+29x+30$

Le radici intere vanno cercate tra i divisori di 30, precisamente in
$\{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 5;\pm 6;\pm 10;\pm 15;\pm 30\}$.
Sostituiamo questi numeri al posto della x, finché non troviamo la radice.
Per $x=1$ si ha $P(1)=1-5-7+29+30$ senza effettuare il calcolo si nota che i numeri positivi superano quelli negativi, quindi 1 non è una radice.
Per $x=-1$ si ha
$P(-1)=(-1)^4-5\cdot(-1)^3-7\cdot(-1)^2+29\cdot(-1)+30=+1+5-7-29+30=0$
Una radice del polinomio è quindi -1; utilizzando la regola di Ruffini abbiamo:

	1	-5	-7	29	30
-1		-1	6	1	-30
	1	-6	-1	30	0

Con i numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga costruiamo il polinomio quoziente
$x^3-6x^2-1x+30$ Possiamo allora scrivere:
$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=(x-1)(x^3-6x^2-x+30)$
Con lo stesso metodo scomponiamo il polinomio $x^3-6x^2-1x+30$
Cerchiamone le radici tra i divisori di 30, precisamente nell'insieme
$\{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 5;\pm 6;\pm 10;\pm 15;\pm 30\}$. Bisogna ripartire dall'ultima radice trovata, cioè da -1
Per $x=-1$ si ha $P(-1)=(-1)^3-6\cdot(-1)^2-1\cdot(-1)+30=-1-6+1+30\neq 0$.
Per $x=+2$ si ha $P(+2)=(+2)^3-6\cdot(+2)^2-1\cdot(+2)+30=+8-24-2+30\neq 0$.
Per $x=-2$ si ha $P(+2)=(-2)^3-6\cdot(-2)^2-1\cdot(-2)+30=-8-24+2+30=0$.
Quindi -2 è una radice del polinomio. Applichiamo la regola di Ruffini, ricordiamo che al primo rigo dobbiamo mettere i coefficienti del polinomio da scomporre, cioè $x^3-6x^2-1x+30$

	1	-6	-1	30
-2		-2	+16	-30
	1	-8	+15	0

Il polinomio $q(x)$ si scompone nel prodotto $x^3-6x^2-x+30=(x+2)\cdot(x^2-8x+15)$.
Infine possiamo scomporre $x^2-8x+15$ come trinomio notevole: i due numeri che hanno per somma -8 e prodotto +15 sono -3 e -5. In conclusione posiamo scrivere la scomposizione:
$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$

Non sempre è possibile scomporre un polinomio utilizzando solo numeri interi. In alcuni casi possiamo provare con le frazioni, in particolare quando il coefficiente del termine di grado maggiore non è 1. In questi casi possiamo cercare la radice del polinomio tra le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, dove p un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado maggiore.

Esempio
$6x^2-x-2$
Determiniamo prima di tutto l'insieme nel quale possiamo cercare le radici del polinomio. Costruiamo tutte le frazione del tipo $\frac{p}{q}$, con p divisore di -2 e q divisore di 6. I divisori di 2 sono $\{\pm1;\pm2\}$ mentre i divisori di 6 sono $\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$. Le frazioni tra cui cercare sono $\left\{\pm\frac{1}{1};\pm\frac{1}{2};\pm\frac{2}{1};\pm\frac{2}{3};\pm\frac{2}{6}\right\}$ cioè $\left\{\pm1;\pm\frac{1}{2};\pm2;\pm\frac{2}{3};\pm\frac{1}{3}\right\}$.
$A(1)=-3;\ A(-1)=5;\ A\left(\frac{1}{2}\right)=-1;\ A\left(-\frac{1}{2}\right)=0$
Sappiamo dal teorema di Ruffini che il polinomio $A(x)=6x^2-x-2$ è divisibile per $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ dobbiamo quindi trovare $Q(x)$ per scomporre $6x^2-x-2$ come $Q(x)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$.
Applichiamo la regola di Ruffini per trovare il quoziente:

	6	−1	−2
$-\frac{1}{2}$		−3	2
	6	−4	0

$Q(x)=6x-4$ e il polinomio sarà scomposto in $(6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$
Mettendo a fattore comune 2 nel primo binomio si ha:
$6x^2-x-2=(6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)=2(3x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(3x-2)(2x+1)$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini

137 $2x^2-5x+2$ $\quad$ $3x^2-5x-2$

138 x^3-4x^2+x+6 $\quad$ $x^3+2x^2-9x-18$

139 $2x^3-3x^2-8x+12$ $\quad$ $x^4-x^3-5x^2-x-6$

140 x^3+2x^2-2x+3 $\quad$ x^3+x^2-5x+3

141 $2x^3-9x^2+7x+6$ $\quad$ $3x^3+5x^2-16x-12$

142 $2x^3+5x^2+5x+3$ $\quad$ $2x^3-13x^2+24x-9$

143 $6x^3-11x^2-3x+2$ $\quad$ $4x^4-4x^3-25x^2+x+6$

144 $a^5+3a^4-2a^3-9a^2-11a-6$ $\quad$ R. $(a+1)(a-2)(a+3)(a^2+a+1)$

145 $2x^5+16x^4+19x^3-94x^2-213x-90$ $\quad$ R. $(x+2)(x+3)(x+5)(2x^2-4x-3)$

146 $a^6+6a^4+11a^2+6$ sostituisci $a^2=x$ $\quad$ R. $(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)$

147 $2x^{2n}+x^n-3$ sostituisci $x^n=a$ $\quad$ R. $(x^n-1)(2x^n+3)$

148 $x^3-ax^2-2ax+2a^2$ cerca le radici tra i monomi divisori di $2a^2$

►3. Somma e differenza di due cubi

Per scomporre i polinomi del tipo A^3+B^3 e A^3-B^3 possiamo utilizzare il metodo di Ruffini.

Esempio

x^3-8 .

Il polinomio si annulla per x=2, che è la radice cubica di 8. Calcoliamo il quoziente.

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	/

Il polinomio quoziente è $Q(x)=x^2+2x+4$ e la scomposizione risulta

$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

Notiamo che il quoziente assomiglia al quadrato di un binomio, ma non lo è in quanto il termine intermedio è il prodotto e non il doppio prodotto dei due termini, si usa anche dire che è un falso quadrato. Un trinomio di questo tipo non è ulteriormente scomponibile.

Esempio

x^3+27

Il polinomio si annulla per x=-3, cioè $P(-3)=(-3)^3+27=-27+27=0$. Il polinomio quindi è divisibile per $x+3$. Calcoliamo il quoziente attraverso la regola di Ruffini.

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	/

Il polinomio quoziente è $Q(x)=x^2-3x+9$ e la scomposizione risulta

$x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9)$.

In generale possiamo applicare le seguenti regole per la scomposizione di somma e differenza di due cubi:

$$\boxed{A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)}$$
$$\boxed{A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)}$$

149	x^3-1	$27-x^3$	$64a^3-8b^3$
150	$0{,}01^3-1$	x^6-y^6	$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{27}b^3$
151	$27x^3-8y^3$	a^3b^3-1	a^3-125
152	$\frac{27}{8}x^3-8$	$0{,}064x^3+\frac{1}{27}y^3$	$\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{27}t^3$
153	x^6-y^3	x^9+27y^3	$8x^{12}-1$
154	$a^{3n}+1$	$a^{3n}-8b^3$	$a^{3n+3}+1$

4. SCOMPOSIZIONE MEDIANTE METODI COMBINATI

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato alcuni metodi per ottenere la scomposizione in fattori di un polinomio e talvolta abbiamo mostrato che la scomposizione si ottiene combinando metodi diversi. Sostanzialmente non esiste una regola generale per la scomposizione di polinomi, cioè non esistono criteri di divisibilità semplici come quelli per scomporre un numero nei suoi fattori primi. In questo paragrafo vediamo alcuni casi in cui si applicano vari metodi combinati tra di loro..
Un buon metodo per ottenere la scomposizione è procedere tenendo conto di questi suggerimenti:

1. analizzare se si può effettuare **un raccoglimento totale;**
2. **contare il numero di termini** di cui si compone il polinomio:
   2.1.con **due** termini analizzare se il binomio è
      a) una *differenza di quadrati* $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
      b) una *somma di cubi* $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$
      c) una *differenza di cubi* $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$
      d) una *somma di quadrati o di numeri positivi* nel qual caso è ***irriducibile*** A^2+B^2
   2.2.con **tre** termini analizzare se è
      a) un *quadrato di binomio* $A^2\pm 2\mathrm{AB}+B^2=(A\pm B)^2$
      b) un *trinomio particolare* del tipo $x^2+Sx+P=(x+a)(x+b)$ con $a+b=S\,;\,a\cdot b=P$
      c) un *falso quadrato, che è irriducibile* $A^2\pm AB+B^2$
   2.3.con **quattro** termini analizzare se è
      a) un *cubo di binomio* $A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3=(A\pm B)^3$
      b) una *particolare differenza di quadrati* $A^2\pm 2\mathrm{AB}+B^2-C^2=(A\pm B+C)(A\pm B-C)$
      c) possibile un *raccoglimento parziale* $ax+bx+ay+by=(a+b)(x+y)$
   2.4.con **sei** termini analizzare se è
      a) un *quadrato di trinomio* $A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC=(A+B+C)^2$
      b) possibile un *raccoglimento parziale* $ax+bx+cx+ay+by+cy=(a+b+c)(x+y)$
3. se non riuscite ad individuare nessuno dei casi precedenti, provate ad applicare la **regola di Ruffini**

Ricordiamo infine alcune formule per somma e differenza di potenze dispari

$$A^5+B^5=(A+B)\left(A^4-A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4\right)$$

$$A^5-B^5=(A-B)\left(A^4+A^3B+A^2B^2+AB^3+B^4\right)$$

$$A^7\pm B^7=(A\pm B)(A^6\mp A^5B+A^4B^2\mp A^3B^3+A^2B^4\mp AB^5+B^6)$$

$$(A^{11}+B^{11})=(A^{10}+A^9B+A^8B^2+A^7B^3+A^6B^4+A^5B^5+A^4B^6+A^3B^7+A^2B^8+AB^9+B^{10})$$

… … … ...

La differenza di due potenze ad esponente pari (uguale o diverso) rientra nel caso della differenza di quadrati:

$$A^8-B^{10}=(A^4-B^5)(A^4+B^5)$$

In alcuni casi si può scomporre anche la somma di potenze pari:

$$A^6+B^6=(A^2)^3+(B^2)^3=(A^2+B^2)(A^4-A^2B^2+B^4)$$

$$A^{10}+B^{10}=\left(A^2+B^2\right)\left(A^8-A^6B^2+A^4B^4-A^2B^6+B^8\right)$$

Proponiamo di seguito alcuni esercizi svolti o da completare in modo che possiate acquisire una certa abilità nella scomposizione di polinomi

Esempio

$P(x) = a^2 x + 5abx - 36b^2 x$

Il polinomio ha 3 termini, è di terzo grado in 2 variabili, è omogeneo;
tra i suoi monomi si ha M.C.D.= x; effettuiamo il raccoglimento totale: $P(x) = x \cdot (a^2 + 5ab - 36b^2)$
il trinomio ottenuto come secondo fattore è di grado 2 in 2 variabili, omogeneo;
può essere riscritto $a^2 + (5b) \cdot a - 36b^2$, proviamo a scomporlo come trinomio particolare: cerchiamo due monomi *m* ed *n* tali che $m + n = 5b$ e $m \cdot n = -36b^2$; i due monomi sono *m=9b* ed *n=-4b*;

$a^2 x + 5abx - 36b^2 x = x \cdot (a + 9b) \cdot (a - 4b)$

Esempio

$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$

Facendo un raccoglimento parziale del coefficiente 2 tra gli ultimi tre monomi perché otterremmo $x^2 + y^2 + 2 \cdot (xy - x - y)$ su cui non possiamo fare alcun ulteriore raccoglimento.
I primi tre termini formano però il quadrato di un binomio e tra gli altri due possiamo raccogliere –2, quindi $(\underline{x+y})^2 - 2 \cdot (\underline{x+y})$, (x + y) tra i due termini si ottiene

$\underbrace{x^2 + y^2 + 2xy}- \underbrace{2x - 2y} = (x + y) \cdot (x + y - 2)$

Esempio

$8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2$

Tra i monomi sparsi possiamo raccogliere 2 a fattore comune

$p = 2 \cdot (4a + 5b - 1) + (1 - 4a - 5b)^2$

Osserviamo che la base del quadrato è l'opposto del polinomio contenuto nel primo termine: poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato possiamo riscrivere: $p = 2 \cdot (4a + 5b - 1) + (-1 + 4a + 5b)^2$

$8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2 = (4a + 5b - 1) \cdot (2 - 1 + 4a + 5b) = (4a + 5b - 1) \cdot (1 + 4a + 5b)$

Esempio

$t^3 - z^3 + t^2 - z^2$

Il polinomio ha 4 termini, è di terzo grado in due variabili.
Poiché due monomi sono nella variabile t e gli altri due nella variabile z potremmo subito effettuare un raccoglimento parziale:
$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = t^2 \cdot (t + 1) - z^2 \cdot (z + 1)$, che non permette un ulteriore passo. Occorre quindi un'altra idea.
Notiamo che i primi due termini costituiscono una differenza di cubi e gli altri due una differenza di quadrati; applichiamo le regole:
$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot (t^2 + tz + z^2) + (t - z) \cdot (t + z)$
Ora effettuiamo il raccoglimento totale del fattore comune $(t - z)$
$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot (t^2 + tz + z^2 + t + z)$

Esempio

$P(x) = x^3 - 7x - 6$

Il polinomio ha 3 termini, è di 3° grado in una variabile.
Non possiamo utilizzare la regola del trinomio particolare poiché il grado è 3;
procediamo con la regola di Ruffini: cerchiamo il numero k tale che p(k) sia uguale a zero nell'insieme dei divisori del termine noto $D = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$;
per $x = +1$ si ha $P(+1) = (+1)^3 - 7 \cdot (+1) - 6 = 1 - 7 - 6 \neq 0$;
per $x = -1$ si ha $P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$;
quindi $p = x^3 - 7x - 6 = (x + 1) \cdot q(x)$ con q(x) polinomio di secondo grado che determiniamo con la regola di Ruffini:

	1	0	-7	-6
-1		-1	+1	+6
	1	-1	-6	0

pertanto: $P(x)=x^3-7x-6=(x+1)\cdot(x^2-x-6)$

Il polinomio quoziente è un trinomio di secondo grado; proviamo a scomporlo come trinomio notevole; cerchiamo due numeri a e b tali che $a+b=-1$ e $a\cdot b=-6$;

i due numeri vanno cercati tra le coppie che hanno -6 come prodotto, precisamente (-6, +1), (-3, +2), (+6,-1), (+3,-2). La coppia che fa a caso nostro è -3 +2 quindi si scompone $q=x^2-x-6=(x-3)\cdot(x+2)$.

In definitiva $x^3-7x-6=(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x+2)$

Esempio

$(m^2-4)^2-m^2-4m-4$

Il polinomio ha 4 termini di cui il primo è un quadrato di binomio; negli altri tre possiamo raccogliere -1;

$(m^2-4)^2-m^2-4m-4=(m^2-4)^2-(m^2+4m+4)$

Notiamo che anche il secondo termine è un quadrato di binomio, quindi: $(m^2-4)^2-(m+2)^2$

che si presenta come differenza di quadrati,allora diviene: $[(m^2-4)+(m+2)]\cdot[(m^2-4)-(m+2)]$

eliminando le parentesi tonde $(m^2+m-2)\cdot(m^2-m-6)$

I due fattori ottenuti si scompongono con la regola del trinomio. In definitiva si ottiene:

$(m^2+m-2)\cdot(m^2-m-6) = (m+2)\cdot(m-1)\cdot(m-3)\cdot(m+2)=(m+2)^2\cdot(m-1)\cdot(m-3)$.

Esempio

$(a-3)^2+(3a-9)\cdot(a+1)-(a^2-9)$

$=(a-3)^2+3\cdot(a-3)\cdot(a+1)-(a-3)\cdot(a+3)$

mettiamo a fattore comune (a-3)

$(a-3)\cdot[(a-3)+3\cdot(a+1)-(a+3)]$

Svolgiamo i calcoli nel secondo fattore, otteniamo:

$(a-3)(a-3+3a+3-a-3)=(a-3)(3a-3)$

Esempio

$a^4+a^2b^2+b^4$

Osserva che per avere il quadrato del binomio occorre il doppio prodotto, aggiungendo e togliendo a^2b^2 otteniamo il doppio prodotto cercato e al passaggio seguente ci troviamo con la differenza di quadrati:

$a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

Esempio

$a^5+2a^4b+a^3b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5$

$a^3(a^2+2ab+b^2)+b^3(a^2+2ab+b^2)=(a^3+b^3)(a^2+2ab+b^2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a+b)^2=$

$(a+b)^3(a^2-ab+b^2)$

Esempio

$a^2x^2+2ax^2-3x^2-4a^2-8a+12$

$x^2(a^2+2a-3)-4(a^2+2a-3)=(x^2-4)(a^2+2a-3)=(x+2)(x-2)(a-1)(a+3)$

Scomporre in fattori

155 t^5-z^5 $\quad$ $3x^2+6x+6$

156 t^6-2t^3+1 $\quad$ $tx+x^2+y^2+ty+2xy$

157 $(x^2-7x+10)^2-x^2+10x-25$ $\quad$ R. $(x-5)^2(x-1)(x-3)$

158 $12m^3+9m^5-3m^7$ $\quad$ $a^2b-25b+a^2-25$

159 $2ab-b^2+3\cdot(b-2a)^2$ $\quad$ x^6-y^6

160 $\frac{4}{9}a^2-b^2+\frac{2}{3}a+b$ $\quad$ R. $(\frac{2}{3}a+b)(\frac{2}{3}a-b+1)$

161 $3k^3-k^2+k+5$ $\quad$ y^6+y^3-2

162 a^8-1 $\quad$ $32a^4b^3-2b^3$

163 $x^2-6x+9-(y^2-2y+1)$ $\quad$ R. $(x-4+y)(x-2-y)$

164 $x^6-8a^3+12a^2x^2-6ax^4$ $\quad$ $16a^4x^2-8a^2b^2x^2+b^4x^2$

165 a^4+4a^2-32 $\quad$ $4x^3+7x^2-14x+3$

166 $2ax^4y-8bx^4y-2axy^4+8bxy^4$ $\quad$ $36ab-49a^3b^3$

167 $\frac{1}{9}x^6-2x^4+9x^2$ $\quad$ $\frac{4}{25}a^4+\frac{25}{9}b^2-\frac{4}{3}a^2b$

168 $\frac{1}{16}a^2+4b^4-ab^2$ $\quad$ R. $\left(\frac{1}{4}a-2b^2\right)^2$

169 x^4+5x^2-36 $\quad$ $-4x^7+16x^6+28x^5-88x^4-96x^3$

170 $ax+bx-3ay-3by$ $\quad$ $640a^3x^2y-960a^3xy^2+10b^3x^2y-15b^3xy^2$

171 $12ax^2+12axy+3ay^2$ $\quad$ $625a^4-b^4$

172 x^3-5x^2+4 $\quad$ $x^2-3a^3+ax-3a^2x$

173 $4(x^2-1)^2-4y(x-1)+y^2$ $\quad$ R. $(2x-2-y)^2$

174 $4a^2-9-4b^2+12b$ $\quad$ x^3+3x^2-6x-8

175 $2ax^2+8ay^2+8axy$ $\quad$ x^5-2x^2-x+2

176 $a^2-a+9(a^2-a)$ $\quad$ R. $10a(a-1)$

177 $x^6-y^6+x^3+y^3$ $\quad$ $x^2-3a^3+ax-3a^2x$

178 $16x^3-72x^2+108x-54$ $\quad$ $50a^4b^3-2b^3$

179 $4a^4b-4a^3b^2+6a^3b^3-6a^2b^4$ $\quad$ $5x^4-5x^3y^2-5x^2y+5xy^3$

180 $-8a^3+12a^2x^2-6ax^4+x^6$ $\quad$ $16a^4x^2-8a^2b^2x^2+b^4x^2$

181 $x^2+14x-32$ $\quad$ $4x^3+7x^2-14x+3$

182 $2ax^4y-6bx^4y-2axy^4+6bxy^4$ $\quad$ $2b^6c-8c^3$

183 $\frac{1}{9}a^6+9a^2-2a^4$ $\quad 1-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^6$

184 $8x^3-14x^2+7x-1$ R. $(x-1)(2x-1)(4x-1)$

185 x^4-9x^2+20 $\quad 3a^4b^3-6a^3b^3-9a^2b^3$

186 $4a^5b^2+32a^2b^5$ $\quad 32a-50ab^2$

187 $5x^4y^2+5x^4-5xy^4-5xy^2$ $\quad 4y^2-12y+9$

188 $\frac{8}{27}x^3-2x^2+\frac{9}{2}x-\frac{27}{8}$ $\quad \frac{4}{49}x^2y^2-\frac{4}{7}xyz+z^2$

189 x^4-4x^2-45 $\quad 3x^3+x^2-8x+4$

190 $81a^4-64a^2b^2$ $\quad -24a^4b^2x^2-72a^4b^2y^2-3ab^5x^2-9ab^5y^2$

191 $4x^3+8x^2+x-3$ R. $(2x+3)(2x-1)(x+1)$

192 $\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{27}$ $\quad \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}ax+\frac{1}{9}a^2$

193 $a^2-10a-75$ $\quad 3x^5+12x^4-21x^3-66x^2+72x$

194 $2a^4b^3c-8a^2bc^5$ $\quad 5a^4x^3-40a^4y^3-45a^2b^2x^3+360a^2b^2y^3$

195 $3x^4y^3+9x^4-9xy^3-27x$ $\quad 81a^6-18a^4b^2+a^2b^2$

196 $125+75y+15y^2+y^3$ $\quad 4a^2x^2-16a^2y^2-b^2x^2+4b^2y^2$

197 x^4+2x^2-24 $\quad 5x^3-17x^2+16x-4$

198 $32a^3x^2y-48a^3xy^2+4b^3x^2y-6b^3xy^2$ $\quad 81a-16a^3b^2$

199 x^3+2x^2-x-2 R. $(x-1)(x+2)(x+1)$

200 $x^6-6x^4+12x^2-8$ $\quad a^7-a^4b^2-4a^3b^2+4b^4$

201 x^4+6x^2-40 $\quad x^5-13x^3+12x^2$

202 $32ab-2a^5b^5$ $\quad 24x^4y+36x^3y^3+18x^2y^5+3xy^7$

203 $\frac{4}{9}a^4+\frac{4}{9}a^2b+\frac{b^2}{9}$ $\quad \frac{4}{25}+\frac{4}{5}xy+x^2y^2$

204 $-2a^{10}+12a^7b-24a^4b^2+16ab^3$ $\quad x^3-7x^2-25x+175$

205 $-4x^7+16x^6+28x^5-88x^4-96x^3$ $\quad 128a^3-200a$

206 $20x^3-45x$ R. $5x(2x-3)(2x+3)$

207 $27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$ $\quad 18p^3q^2x-2pq^4x+18p^3q^2y-2pq^4y$

208 x^4-6x^2-27 $\quad x^4+4x^3+x^2-6x$

209 $8a^5b^2-64a^2b^5$ $\quad 4a^2b^5-81b$

210 $20a^6-16a^3c-25a^4b+20abc$ $\quad 2a^7-6a^4x^2+6a^4b^2-18ab^2x^2$

211 $x^5+3x^4-xy^4-3y^4$ $\quad$ R. $(x+3)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

212 x^4+3x^2-28 $\quad 2x^3-3x^2-5x+6$

213 $48a^5bx+16a^5by-6a^2b^4x-2a^2b^4y$ $\quad 18a^4b-2b^3$

214 $4x^2+2xy+\frac{1}{4}y^2$ $\quad \frac{16}{27}x^3+\frac{8}{3}x^2y+4xy^2+2y^3$

215 $1-9x+27x^2-27x^3$ $\quad 6x^3y-12x^2y^2+6xy^3$

216 $x^2(x^4-18x^2+81)-x^6+729$ $\quad$ R. $-9(x+3)(x-3)(2x^2+9)$

217 $x^2-3a^3+ax-3a^2x$ $\quad x^2-12x+133$

218 $3x^5-27xy^4$ $\quad 25y^4-10y^2+1$

219 $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$ $\quad$ R. $(x-2y)^3$

220 $ax+bx-3ay-3by$ $\quad 2ax^2+8ay^2+8axy$

221 $81a^4-b^4$ $\quad 3a^5b^3+24a^2b^9$

222 x^5-2x^2-x+2 $\quad x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$

223 $4ax^5-2ax^3z^4+8ax^3y^2-4axy^2z^4$ $\quad 16ab-81a^5b^9$

224 $6x^7+2x^6-16x^5+8x^4$ $\quad -54a^7x+54a^5x^2-18a^3x^3+2ax^4$

225 x^4-4x^2-45 $\quad$ R. $(x^2-3)(x^2+3)(x^2+5)$

226 $64a^9-48a^6b^2+12a^3b^4-b^6$ $\quad 4a^2x^2-4b^2x^2-9a^2y^2+9b^2y^2$

227 $x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$ $\quad 5x^4-5x^2y^4$

228 $27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$ $\quad -3a^7x^2+9a^5x^4-9a^3x^6+3ax^8$

229 $4a^2x-4a^2y^2-4ab^2x+4ab^2y^2$ $\quad a^2+12a+36$

230 $x^3-13x^2+35x+49$ $\quad$ R. $(x+1)(x-7)^2$

231 $4ab^3c^2+20ab^3-3abc^2-15ab$ $\quad 6a^6b^3-12a^4b^5+6a^2b^7$

232 $81a^6b^3-a^2b^3$ $\quad 6abx-3x+2aby-y$

233 $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ $\quad 8a^7b-8a^3b^3+12a^6b-12a^2b^3$

234 y^3-5y^2-24y $\quad$ R. $y(y+3)(y-8)$

235 $8a^4b-8a^3b^2+12a^3b^3-12a^2b^4$ $\quad 3a^3x+3a^3y-3abx-3aby$

236 z^8-2z^4+1 $\quad 3k^4+k^6+1+3k^2$

237 $3x^5-27xy^4$ $\quad 25y^4-10y^2+1$

238 $x^2+4xy-6x+4y^2-12y+9$ $\quad$ R. $(x+2y-3)^2$

239 $2x^4-4x^3+4x^2-4x+2$ R. $2(x^2+1)(x-1)^2$

240 $(3-a)^2+(5+a)\cdot(a-3)$ $3x^3-x-1+3x^2$

241 x^4-7x^2-60 x^3-5x^2+6x

242 $4a^2-9-4b^2+12b$ x^5-13x^3+36x

243 $x^2-y^2+2ay-a^2$ R. $(x-a+y)(x+a-y)$

244 $(2x-1)^3-(3-6x)^2$

245 $-4x-3-2(x+1)(16x^2+9+24x)$

246 $(x-2)+3(x^2-4x+4)-(x+1)(x-2)^2$

247 $(x-1)^2-(x+2)(x^2-2x+1)-2(x^3-3x^2+3x-1)$

248 $(3x+6)-5(x^2+4x+4)^2$

249 $(y-x)^2(3x+2)-2(x-y)^3-2x^2+2y^2$ R. $(x-y)(x^2+xy-4y-2y^2)$

250 $(-x^2+6x-9)^2-(4x-12)(x+1)$

251 $x+1-2(x^2+2x+1)+(3x^2+x^3+3x+1)(x-2)$

252 $36x^2+24xy-48x+4y^2-16y+15$ R. $(6x+2y-3)(6x+2y-5)$

253 $x^{a+1}-5x^a-4x^{a-2}$

254 $x^{n^2-1}+2x^{n^2+2}+x^{n^2}(x-3)$

255 $x^{4n+1}-x^{3n+1}y^n+2x^n y^{4n}-2y^{5n}$

256 $x^{n+2}+3x^n y^{2n}-x^2 y^3-3y^{3+2n}$

257 $x^a y^b+x^a-y^b-1$

258 $x^{2n+1}y^{h+1}-2x^{2n+1}-y^{h+1}+2$

259 $x^{a+4}-3x^{a+2}y^a+x^2y^2-3y^{2+a}$

5. M.C.D. E m.c.m. TRA POLINOMI

Il calcolo del minimo comune multiplo (m.c.m.) e del massimo comune divisore (M.C.D.) si estende anche ai polinomi. Per determinare M.C.D e m.c.m. di due o più polinomi occorre prima di tutto scomporli in fattori irriducibili. La cosa non è semplice poiché non si può essere sicuri di aver trovato il massimo comune divisore o il minimo comune multiplo per la difficoltà di decidere se un polinomio è irriducibile: prudentemente si dovrebbe parlare di divisore comune e di multiplo comune.
Un polinomio A si dice **multiplo** di un polinomio B se esiste un polinomio C per il quale $A=B\cdot C$; in questo caso diremo anche che B è **divisore** del polinomio A.

►1. Massimo Comun Divisore

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il massimo comune divisore tra due o più polinomi è il prodotto di tutti i fattori comuni ai polinomi, presi ciascuno una sola volta, con il minimo esponente.
Sia i coefficienti numerici, sia i monomi possono essere considerati polinomi.

Procedura per calcolare il M.C.D. tra polinomi

1. scomponiamo in fattori ogni polinomio;
2. prendiamo i fattori comuni a tutti i polinomi una sola volta con l'esponente più piccolo;
3. se non ci sono fattori comuni a tutti i polinomi il M.C.D. è 1.

Esempio

Calcolare $M.C.D.(3a^2b^3-3b^3;\ 6a^3b^2-6b^2;\ 12a^2b^2-24ab^2+12b^2)$

- Scomponiamo in fattori i singoli polinomi
  $3a^2b^3-3b^3=3b^3(a^2-1)=3b^3(a-1)(a+1)$
  $6a^3b^2-6b^2=6b^2(a^3-1)=6b^2(a-1)(a^2+a+1)$
  $12a^2b^2-24ab^2+12b^2=12b^2(a^2-2a+1)=12b^2(a-1)^2$
- I fattori comuni a tutti i polinomi presi con l'esponente più piccolo sono:
  - tra i numeri il 3
  - tra i monomi b^2
  - tra i polinomi $a-1$

quindi il $M.C.D.=3b^2(a-1)$

►2. Minimo comune multiplo

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il minimo comune multiplo tra due o più polinomi è il prodotto dei fattori comuni e non comuni di tutti i polinomi, quelli comuni presi una sola volta, con il massimo esponente.

Procedura per calcolare il m.c.m. tra polinomi

1. scomponiamo in fattori ogni polinomio;
2. prendiamo tutti i fattori comuni e non comuni dei polinomi, i fattori comuni presi una sola volta con il massimo esponente.

Esempio

Calcolare $m.c.m.(3a^2b^3-3b^3;\ 6a^3b^2-6b^2;\ 12a^2b^2-24ab^2+12b^2)$

- Scomponiamo in fattori i singoli polinomi
  $3a^2b^3-3b^3=3b^3(a^2-1)=3b^3(a-1)(a+1)$
  $6a^3b^2-6b^2=6b^2(a^3-1)=6b^2(a-1)(a^2+a+1)$
  $12a^2b^2-24ab^2+12b^2=12b^2(a^2-2a+1)=12b^2(a-1)^2$
- Il m.c.m. tra i coefficienti numerici è 6;
- tra i monomi è b^3 ;
- tra i polinomi $(a-1)^2\cdot(a+1)\cdot(a^2+a+1)$

Quindi $m.c.m.=12b^3(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1)$

Calcola il m.c.m e il M.C.D dei seguenti gruppi di polinomi

260 $a+3;\quad 5a+15;\quad a^2+6a+9$

261 $a^2-b^2;\quad ab-b^2;\quad a^2b-2ab^2+b^3$

262 $2x^3-12x^2y+24xy^2-16y^3;\quad 6x^2-12xy;\quad 4x^3-16x^2y+16xy^2$

263 $a^6b^2c^3-2a^5b^2c^3+a^4b^2c^3;\quad a^{10}b^3c^5-a^7b^3c^5;\quad a^7b^2c^3-a^5b^2c^3$

264 $x^2-5x+4;\quad x^2-3x+2;\quad x^2-4x+3$

265 $x^2+2x-2;\quad x^2-4x+4;\quad x^2-4$

266 $a^3b^2-2a^2b^3;\quad a^3b-4a^2b^2+4ab^3;\quad a^3b^2-4ab^4$

267 $x^3+2x^2-3x;\quad x^3-x;\quad x^2-2x+1$

268 $a-b;\quad ab-a^2;\quad a^2-b^2$

269 $b+2a;\quad b-2a;\quad b^2-4a^2;\quad b^2-4a+4a^2$

270 $a^2-9;\quad 3a-a^2;\quad 3a+a^2$

271 $a+1;\quad a^2-1;\quad a^3+1$

272 $x^2+2xy+y^2;\quad x^2-y^2;\quad (x+y)^2(x-y)$

273 $b^3+b^2-4b-4;\quad b^2-a;\quad b^2-1$

274 $a-2;\quad a^2-9;\quad a^2+a-6$

275 $3x+y+3x^2+xy;\quad 9x^2-1;\quad 9x^2+6xy+y^2$

6. FRAZIONI ALGEBRICHE

►1. Definizione di frazione algebrica

Diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE. Si definisce **frazione algebrica** una espressione del tipo $\frac{A}{B}$ dove A e B sono polinomi.

Osserviamo che un'espressione di questo tipo si ottiene talvolta quando ci si propone di ottenere il quoziente di due monomi.

Esempio

Determinare il quoziente tra $m_1=5a^3b^2c^5$ e $m_2=-3a^2bc^5$

Questa operazione si esegue applicando, sulla parte letterale, le proprietà delle potenze e sul coefficiente la divisione tra numeri razionali:

$q=5a^3b^2c^5:(-3a^2bc^5)=-\frac{5}{3}ab$

Il quoziente è quindi un monomio.

Esempio

Determinare il quoziente tra $m_1=5a^3b^2c^5$ e $m_2=-3a^7bc^5$.

In questo caso l'esponente della *a* nel dividendo è minore dell'esponente della stessa variabile nel divisore quindi si ottiene $q_1=5a^3b^2c^5:(-3a^7bc^5)=-\frac{5}{3}a^{-4}b$

Questo non è un monomio per la presenza dell'esponente negativo alla variabile *a*.

Sappiamo che $a^{-4}=\frac{1}{a^4}$ e quindi

$q_1=5a^3b^2c^5:(-3a^7bc^5)=\frac{-5}{3}a^{-4}b=-\frac{5b}{3a^4}$

Il quoziente è quindi una frazione algebrica.

Analogamente, quando vogliamo determinare il quoziente di una divisione tra un monomio e un polinomio si presentano diversi casi:

Caso1: monomio diviso un polinomio

Esempio

Determinare il quoziente tra: $D=2a^3b$ e $d=a^2+b$; il dividendo è un monomio e il divisore un polinomio.

Questa operazione non ha come risultato un polinomio ma una frazione.

$q=2a^3b:(a^2+b)=\frac{2a^3b}{a^2+b}$.

Caso2: un polinomio diviso un monomio

Esempio

$D=2a^3b+a^5b^3-3ab^2$ e $d=\frac{1}{2}ab$

$q=(2a^3b+a^5b^3-3ab^2):\left(\frac{1}{2}ab\right)=4a^2+2a^4b^2-6b$

Il quoziente è un polinomio

Esempio

$D=2a^3b+a^5b^3-3ab^2$ e $d=\frac{1}{2}a^5b$

Dividiamo ciascun termine del polinomio per il monomio assegnato: il quoziente sarà

$q=(2a^3b+a^5b^3-3ab^2):\left(\frac{1}{2}a^5b\right)=4a^{-2}+2b^2-6a^{-4}b=\frac{4}{a^2}+2b^2-\frac{6b}{a^4}$

Il quoziente è una somma di frazioni algebriche.

Caso3: un polinomio diviso un altro polinomio

Esempio

Determinare il quoziente tra i polinomi: $D=x-3$ e $d=x^2+1$

La divisione tra polinomi in una sola variabile è possibile, quando il grado del dividendo è maggiore o uguale al grado del divisore; questa condizione non si verifica nel caso proposto:

Il quoziente è la frazione algebrica $q=\frac{x-3}{x^2+1}$

Conclusione

una frazione algebrica può essere considerata come il quoziente indicato tra due polinomi.

Ogni frazione algebrica è dunque un'**espressione letterale fratta o frazionaria**.

►2. Discussione di una frazione algebrica

Per **discussione di una frazione algebrica** intendiamo la **ricerca dei valori che attribuiti alle variabili non la rendano priva di significato.**

Poiché non è possibile dividere per 0, una frazione algebrica perde di significato per quei valori che attribuiti alle variabili rendono il denominatore uguale a zero. Quando abbiamo una frazione algebrica tipo $\frac{A}{B}$ poniamo sempre la condizione di esistenza: $B\neq 0$.

Esempio

Determina le condizioni di esistenza della frazione $\frac{1+x}{x}$

Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla. Quindi C.E. $x\neq 0$

Esempio

$\frac{x}{x+3}$

Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla, cioè quando $x+3=0$, cioè $x=-3$. Quindi C.E. $x\neq -3$.

Esempio

$\frac{3a+5b-7}{ab}$

C.E.: $ab\neq 0$ **.** Sappiamo che un prodotto è nullo quando almeno uno dei suoi fattori è nullo, dunque affinché il denominatore non si annulli non si deve annullare né *a* né *b*, quindi $a\neq 0$ e $b\neq 0$ **.**

C.E.: $a\neq 0 \wedge b\neq 0$.

Esempio

Determinare C.E. per le seguenti frazioni

$f_1=\frac{3x-8}{x^2}$; $f_2=\frac{-3x^3+x-2x^2+1}{x-1}$; $f_3=\frac{-6}{2x+5}$; $f_4=\frac{-x^3-8x}{x^2+2}$; $f_5=\frac{2x}{x^2-4}$

f_1: C.E. : $x^2\neq 0$ da cui C.E. $x\neq 0$ infatti una potenza è nulla se la base è uguale a zero.

f_2: C.E. : $x-1\neq 0$ da cui C.E. $x\neq 1$ infatti il polinomio x – 1 si annulla per x = 1.

f_3: C.E. : $2x+5\neq 0$, per risolvere questa disuguaglianza si procede come per le equazioni normali: $2x+5\neq 0 \rightarrow 2x\neq -5 \rightarrow x\neq -\frac{5}{2}$ si può concludere: $C.E.\ x\neq -\frac{5}{2}$

f_4: C.E. : $x^2+2\neq 0$; questo binomio è sempre maggiore di 0 in quanto somma di due grandezze positive, in particolare è maggiore di 2 poiché x^2 essendo positivo, o al massimo nullo, si aggiunge a 2. Pertanto la condizione di esistenza $x^2+2\neq 0$ è sempre verificata, in altre parole la frazione esiste sempre: C.E. Esiste per ogni x.

f_5: C.E. : $x^2-4\neq 0$; per rendere nullo il denominatore si dovrebbe avere $x^2 = 4$ e questo si verifica se x = +2 oppure se x = -2; possiamo anche osservare che il denominatore è una differenza di quadrati e che quindi la condizione di esistenza si può scrivere C.E. : $(x-2)(x+2)\neq 0$, essendo un prodotto possiamo scrivere C.E. : $x-2\neq 0 \wedge x+2\neq 0$ e concludere: C.E. : $x\neq 2 \wedge x\neq -2$.

276 Determinare **C.E.** per le frazioni in più variabili:

$f_1=\frac{a^2-3b}{a-b}$; $f_2=\frac{a+2ab-6b}{a+b}$; $f_3=\frac{-a}{2a-b}$; $f_4=\frac{-x^3-8y^2}{x^2+y^2}$; $f_5=\frac{2x+3y-1}{x^2-4xy}$

f_1: C.E.: $a-b\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq b$.

f_2: C.E.: $a+b\neq 0$ da cui C.E.: … … … ...

f_3: C.E. : ……………. da cui C.E.: … … … … ...

f_4: C.E.: …........... è la somma di due quadrati, mai negativa, ma uguale a zero solo se entrambi i valori attribuiti alle variabili sono zero. Quindi: C.E.: …...............

f_5: C.E.: … … … … … … ; scomponendo in fattori si ha … … … … … … … , ponendo che tutti i fattori siano diversi da zero si ha C.E.: … … … … … … … … … …

Procedura per determinare la Condizione di Esistenza di una frazione algebrica

1. **Porre il denominatore della frazione diverso da zero;**
2. **scomporre in fattori il denominatore;**
3. **porre ciascun fattore diverso da zero;**
4. **escludere i valori che annullano il denominatore.**

Determinare per ciascuna frazione la Condizione di Esistenza

277 $\frac{3x+8y}{x^2-y^2}$ $\quad \frac{-3x^3+x-2x^2+1}{3x-6}$ $\quad \frac{a^2-1}{2a^2x+4ax+2x}$

278 $\frac{-6a-5ab}{2b^2+4ab}$ $\quad \frac{-x^3-8x}{x^2+4x+4}$ $\quad \frac{y-1}{ay+a+y+1}$

279 $\frac{2x}{x^3-7x^2+x-7}$ $\quad \frac{-8a+3ab^4}{a^2b^2-25b^4}$ $\quad \frac{a^3-2b^2}{a^3-b^3}$

280 $\frac{-54}{a^3b^5c}$ $\quad \frac{-8a+3}{a^3+3a^2+3a+1}$ $\quad \frac{ay^2}{y^2-5y+6}$

281 $\frac{b-1}{3ab}$ $\quad \frac{a+b-1}{2a\cdot(b^2-b)}$ $\quad \frac{x+y}{(x-y)^2}$

►3. Semplificazione di una frazione algebrica

Semplificare una frazione algebrica significa dividere numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da zero, in questo modo infatti la proprietà invariantiva della divisione ci garantisce che la frazione non cambia di valore. Quando semplifichiamo una frazione numerica dividiamo il numeratore e il denominatore per il loro M.C.D. che è sempre certamente un numero diverso da zero, ottenendo una frazione ridotta ai minimi termini equivalente a quella assegnata. Quando ci poniamo lo stesso problema su una frazione algebrica, dobbiamo porre attenzione a escludere quei valori che attribuiti alle variabili rendono nullo il M.C.D.

Esempio

$$\frac{16x^3y^2z}{10xy^2} \qquad \text{C.E.} \quad xy^2\neq 0 \rightarrow x\neq 0\,;\, y\neq 0$$

Puoi semplificare la parte numerica $\frac{\cancel{16}^8}{\cancel{10}^5}$. Per semplificare la parte letterale applica la proprietà della potenze relativa al quoziente di potenze con la stessa base:

$x^3 : x = x^{3-1} = x^2$

$y^2 : y^2 = 1$

$$\frac{16x^3y^2z}{10xy^2} = \frac{8x^2z}{5}$$

Esempio

Ridurre ai minimi termini la frazione: $\frac{a^2-6a+9}{a^4-81}$

1° passo: scomponiamo in fattori

- il numeratore: $a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$
- il denominatore: $a^4 - 81 = (a^2-9)\cdot(a^2+9) = (a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)$

2° passo: riscriviamo la frazione $\frac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)}$

3° passo: C.E.: $(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq -3$ e $a\neq +3$

(il terzo fattore non si annulla mai essendo somma di un numero positivo e un quadrato, a sua volta sempre positivo)

4° passo: semplifichiamo:

$$f = \frac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)} = \frac{(a-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-3)}\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)} = \frac{(a-3)}{(a+3)\cdot(a^2+9)}$$

Esempio

Riduciamo ai minimi termini la frazione in due variabili: $\frac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}$.

Scomponiamo in fattori

- numeratore: $x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3 = x^2\cdot(x^2+y^2)-xy\cdot(x^2+y^2) = x\cdot(x^2+y^2)\cdot(x-y)$
- denominatore: $x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3 = x^2\cdot(x^2-y^2)+xy\cdot(x^2-y^2) = x\cdot(x^2-y^2)\cdot(x+y) = x\cdot(x+y)^2\cdot(x-y)$

La frazione diventa: $f = \frac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3} = \frac{x\cdot(x^2+y^2)\cdot(x-y)}{x\cdot(x+y)^2\cdot(x^2+y^2)}$

C.E.: $x\cdot(x+y)^2\cdot(x^2+y^2)\neq 0$ cioè C.E.: $x\neq 0 \wedge x\neq y$

Semplifichiamo i fattori uguali:

$$f = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x^2+y^2)}\cdot\cancel{(x-y)}}{\cancel{x}\cdot(x-y)^2\cdot\cancel{(x^2+y^2)}} = \frac{1}{(x-y)} \qquad f = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$$

Semplificazioni errate

$\frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}}$ questa **semplificazione è errata** perché a e b sono addendi, non sono fattori.

$\frac{\cancel{x^2}+x+4}{\cancel{x^2}+2}$ questa **semplificazione è errata** perché x^2 è un addendo, non un fattore.

282 Completa i passaggi e determina la frazione ridotta ai minimi termini:

numeratore: $5x + 5y = 5\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots..)$

$$f=\frac{5x+5y}{3x+3y+ax+ay}$$

denominatore: $3x + 3y + ax + ay = 3\cdot(\ldots\ldots) + a\cdot(\ldots\ldots) = (......)\cdot(.......)$

quindi $f=\frac{5\cdot(\ldots\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots)}$; C.E. : ………………….

semplificando $f=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

283 Completa i passaggi suggeriti e determina la frazione ridotta ai minimi termini:

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$$

Scomponi in fattori numeratore e denominatore

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\frac{(...+...)\cdot(...-...)}{(...+...)^2}$$

Poni le C.E. … … … …

Semplifica la frazione $\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

284 $f=\frac{4x^2-4+x^3-x}{2x+2}=\frac{4\cdot(\ldots-\ldots.)+x\cdot(\ldots-\ldots.)}{2\cdot(\ldots.+\ldots.)}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

C.E. ……………… Semplificando $f=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Le seguenti semplificazioni sono errate. Spiegate perché e dove.

284 $\frac{\cancel{3}a\cdot(a-2)}{\cancel{3}ax-7}=\frac{a-2}{x-7}$; $\frac{\cancel{(x-y^2)}\cdot\cancel{(a-b)}}{\cancel{(y^2-x)}\cdot\cancel{(a-b)}}=1$; $\frac{\cancel{(2x-3y)}}{(3y-2x)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{(3y-2x)}$

285 $f=\frac{a^2+ab}{a^3}=\frac{\cancel{a}\cdot(a+b)}{a^{\cancel{3}2}}=\frac{\cancel{a}+b}{a^{\cancel{2}}}=\frac{1+b}{a}$

Completa i passaggi

286 $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\frac{(\ldots-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}=$ R $\frac{x-2}{x+2}$

287 $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\frac{(\ldots-\ldots)^2}{(\ldots-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}=$ R $\frac{x-3}{x+3}$

288 $\frac{4x^2-4}{8x^2-8}=\frac{\ldots(\ldots-\ldots)}{\ldots(\ldots-\ldots)}=\frac{\ldots(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots)}{\ldots(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots)}$ R $\frac{1}{2}$

289 $\frac{2x^2+8x+8}{4x^2-16}=\frac{2(\ldots+\ldots+\ldots)}{\ldots(\ldots-\ldots)}=\frac{2(\ldots+\ldots)^2}{\ldots(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots)}$ R $\frac{x+2}{2(x-2)}$

290 $\frac{ax+x+a^2+a}{a^2+2a+1}=\frac{x(\ldots+\ldots)+a(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}=\frac{(x+\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}$ R $\frac{x+a}{a+1}$

291 $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+2x+1}=\frac{x^2(\ldots+\ldots)+\ldots(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}=\frac{(x^2+\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}$ R $\frac{x^2+1}{x+1}$

292 $\frac{2x^3-2x^2-3x+3}{2x^2-4x+2}=\frac{2x^2(\ldots-\ldots)-3(\ldots-\ldots)}{2(\ldots-\ldots)^2}=\frac{(2x^2-3)(\ldots-\ldots)}{2(\ldots-\ldots)^2}$ R $\frac{2x^2-3}{2(x-1)}$

293 $\dfrac{4x^2-4+x^3-x}{2x+2}=\dfrac{4(\ldots-\ldots)+x(\ldots-\ldots)}{2(\ldots+\ldots)}=\dfrac{(4+x)(\ldots-\ldots)}{2(\ldots+\ldots)}=\dfrac{(4+x)(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots)}{2(\ldots+\ldots)}$

294 $\dfrac{5x+5y}{3x+3y+ax+ay}=\dfrac{5(\ldots+\ldots)}{3(\ldots+\ldots)+a(\ldots+\ldots)}=\dfrac{5(\ldots+\ldots)}{(x+\ldots)\cdot(3+\ldots)}=\dfrac{5}{3+a}$

295 $\dfrac{3a^3-3a^2-a+1}{9a^4-1}=\dfrac{3a^2(a-\ldots)-1(\ldots-\ldots)}{(3a^2-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}=\dfrac{(3a^2-\ldots)\cdot(\ldots-\ldots)}{(3a^2-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}=\dfrac{a-1}{3a^2+1}$

296 $\dfrac{2x-2-ax+a}{x^2-2x+1}=\dfrac{2(\ldots-\ldots)-a(\ldots-\ldots)}{(x-\ldots)^2}=\dfrac{(2-\ldots)\cdot(\ldots-\ldots)}{(x-\ldots)^2}=\dfrac{2-a}{x-1}$

297 $\dfrac{6a^2-4ab+3a-2b}{4a^2+4a+1}=\dfrac{3a(\ldots+\ldots)-2b(\ldots+1)}{(\ldots+1)^2}=\dfrac{(\ldots-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(\ldots+1)^2}=\dfrac{3a-2b}{2a+1}$

298 $\dfrac{x^5-25-25x^3+x^2}{(x^2-10x+25)(x^2-x+1)}=\dfrac{x^2(\ldots+\ldots)-25(\ldots+\ldots)}{(x-\ldots)^2(x^2-x+1)}=\dfrac{(\ldots-25)\cdot(\ldots+\ldots)}{(x-\ldots)^2(x^2-x+1)}=$

$\dfrac{(\ldots-5)\cdot(\ldots+\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(x-\ldots)^2(x^2-x+1)}=\dfrac{(\ldots+5)\cdot(x^3+\ldots)}{(x-5)(x^2-x+1)}=\dfrac{(x+5)\cdot(x+1)(\ldots-\ldots+1)}{(x-5)(x^2-x+1)}=\dfrac{(x+5)\cdot(x+1)}{(x-5)}$

299 $\dfrac{4x^3-4x^4+8x-8x^2}{1-x^2}=\dfrac{4x\cdot(\ldots-\ldots+\ldots-\ldots)}{(\ldots-\ldots)(1+\ldots)}=\dfrac{4x\cdot[x^2(\ldots-\ldots)+2(\ldots-\ldots)]}{(\ldots-\ldots)(1+\ldots)}=$

$\dfrac{4x\cdot(x^2+\ldots)(\ldots-\ldots)}{(\ldots-\ldots)(1+\ldots)}=\dfrac{4x\cdot(x^2+2)}{1+x}$

Ridurre ai minimi termini le frazioni, indicando sempre le C.E.

300	$\dfrac{4x+4y}{3x+3y+ax+ay}$	sol $\dfrac{4}{a+3}$	$\dfrac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}$	sol $\dfrac{a+1}{2(a-1)}$
301	$\dfrac{x^2+xy}{2x+2y+ax+ay}$	sol $\dfrac{x}{a+2}$	$\dfrac{3ax+6a+3x+6}{6ax+6x+12a+12}$	sol $\dfrac{1}{2}$
302	$\dfrac{x^2-xy}{2x-2y+ax-ay}$	sol $\dfrac{x}{a+2}$	$\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$	sol $\dfrac{2x+1}{3x+2}$
303	$\dfrac{x^2-xy}{2x^2-2xy+ax^2-axy}$	sol $\dfrac{1}{a+2}$	$\dfrac{2x^2-5x+2}{2x^2-7x+6}$	sol $\dfrac{2x-1}{2x-3}$
304	$\dfrac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}$	sol $\dfrac{a^2+1}{x+2}$	$\dfrac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}$	sol $\dfrac{2x+1}{a+1}$
305	$\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$	sol $\dfrac{x-1}{x+1}$	$\dfrac{2x^3-x-1}{ax^2-ax+x^2-x}$	sol $\dfrac{2x^2+2x+1}{x(a+1)}$
306	$\dfrac{4x+4y}{3x+3y+ax+ay}$	sol $\dfrac{4}{a+3}$	$\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$	sol $\dfrac{2x+1}{3x+2}$
307	$\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$	sol $\dfrac{x+2}{x-2}$	$\dfrac{x^2+xy}{2x+2y+ax+ay}$	sol $\dfrac{x}{a+2}$
308	$\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-5x+1}$	sol $\dfrac{2x-1}{2x-3}$	$\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$	sol $\dfrac{x+2}{x+3}$
309	$\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$	sol $\dfrac{1}{x-1}$	$\dfrac{6a^2b^3-9a^3b^2}{2ab-3a^2-2b+3a}$	sol $\dfrac{3a^2b^2}{a-1}$
310	$\dfrac{x^2+ax}{2x+2a+ax+a^2}$	sol $\dfrac{x}{a+2}$	$\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}$	sol $\dfrac{x+4}{x-3}$
311	$\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-6}$	sol $\dfrac{2x-1}{2x-3}$	$\dfrac{x^3-x^2+x-1}{2x^2-x-1}$	sol $\dfrac{x^2+1}{2x+1}$
312	$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$	sol $\dfrac{x-3}{x-2}$	$\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$	sol $\dfrac{x+2}{x+3}$

313 $\frac{2x^2-4xy}{ax-2ay+2x-4y}$ R $\frac{2x}{a+2}$ $\frac{8a^5b^5-4a^3b^5}{2a^3-a-1+2a^2}$ R $\frac{4a^3b^5}{a+1}$

314 $\frac{2x^2-x-3}{3x^2+2x-1}$ R $\frac{2x-3}{3x-1}$ $\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^3+x^2+2x+2}$ R $\frac{x^2-2}{x^2+2}$

315 $\frac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1}$ R $\frac{x-4}{x+1}$ $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$ R $\frac{2x+1}{x+1}$

316 $\frac{-2a-a^2}{2b+ab+4+2a}$ R $\frac{-a}{b+2}$ $\frac{x^2+3x-28}{x^2+2x-24}$ R $\frac{x+7}{x+6}$

317 $\frac{2x^3-7x^2+7x-2}{2x^3-5x^2+x+2}$ R $\frac{2x-1}{2x+1}$ $\frac{a^2+a}{ab+b+a+1}$ R $\frac{a}{b+1}$

318 $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$ R $\frac{x+2}{x+5}$ $\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+2x+1}$ R $\frac{x^2-2}{x+1}$

319 $\frac{-a-b}{a^2+ab+a+b}$ R $-\frac{1}{a+1}$ $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ R $\frac{x^2+x+1}{x+1}$

320 $\frac{-a^2-a}{ab+b+a+1}$ R $-\frac{a}{b+1}$ $\frac{2x^2-x-3}{x^3+1}$ R $\frac{2x-3}{x^2-x+1}$

321 $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}$ R $\frac{x}{x-2}$ $\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$ R $\frac{x^2+2x+4}{x-2}$

322 $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$ R $\frac{2x-1}{x-3}$ $\frac{x^4-1}{x^4-2x^2+1}$ R $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

323 $\frac{4x+4y}{6x+6y+2ax+2ay}$ R $\frac{2}{a+3}$ $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$ R $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$

324 $\frac{x^2-xy}{2x^2-2xy+ax^2-axy}$ R $\frac{1}{a+2}$ $\frac{x^3-8}{(x^2+4)^2-4x^2}$ R $\frac{x-2}{x^2+4-2x}$

325 $\frac{2x^2-x-1}{2x^2+x}$ R $\frac{x-1}{x}$ $\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x^2+y^2+1+2xy-2x-2y}$ R $\frac{x+y+1}{x+y-1}$

326 $\frac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}$ R $\frac{a^2+1}{x+2}$ $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}$ R $(x+2)(x+1)$

327 $\frac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}$ R $\frac{2x+1}{a+1}$ $\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}$ R $\frac{a+1}{2(a-1)}$

328 $\frac{3ax+6a+3x+6}{6ax+6x+12a+12}$ R $\frac{1}{2}$ $\frac{2x^3-x-1}{ax^2-ax+x^2-x}$ R $\frac{2x^2+2x+1}{x(a+1)}$

329 $\frac{x^3-1}{x^4+2x^3+x^2-1}$ R $\frac{x-1}{x^2+x-1}$ $\frac{x^6-1}{x^4-1}$ R $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$

330 $\frac{2x-2-ax+a}{x^2-2x+1}$ $\frac{4x^3-4x^4+8x-8x^2}{1-x^2}$

331 $f_3=\frac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}$ $\frac{a^2-b^2-ac+bc}{ab+ac+b^2-c^2}$

332 $\frac{y^3-20y^2-34+53y}{y^2-3y+2}$ $\frac{(1+ab)^2-a^2-b^2-2ab}{1+a-b^2-ab^2}$

►4. Moltiplicazione di frazioni algebriche

Il prodotto di due frazioni è una frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Esempio numerico

Si vuole determinare il prodotto $p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}$;

possiamo

- scrivere prima il risultato dei prodotti dei numeratori e dei denominatori e poi ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta,

$$p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}=\frac{\cancel{140}^{\,4}}{\cancel{315}_{\,9}}=\frac{4}{9}$$

oppure

- semplificare i termini delle frazioni e poi moltiplicare secondo lo schema di calcolo illustrato.

$$p=\frac{{}^{1}\cancel{7}}{\cancel{15}_{\,3}}\cdot\frac{\cancel{20}^{\,4}}{\cancel{21}_{\,3}}=\frac{4}{9}$$

<u>Esempio</u>

Determinare il prodotto delle frazioni algebriche $f_1=-\frac{3a^2}{10b^3c^4}$ e $f_2=\frac{25ab^2c^7}{ab}$.

Poniamo le C.E. per ciascuna frazione assegnata ricordando che tutti i fattori letterali dei denominatori devono essere diversi da zero, quindi

C.E. : $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge c\neq 0$

Il prodotto è la frazione $f=-\frac{3a^2}{10b^3c^4}\cdot\frac{25ab^2c7}{ab}=-\frac{15a^2c^3}{2b^2}$.

<u>Esempio</u>

Determinare il prodotto delle frazioni algebriche $f_1=-\frac{3a}{2b+1}$ e $f_2=\frac{10b}{a-3}$.

L'espressione è in due variabili, i denominatori sono polinomi di primo grado irriducibili;

poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: **C.E. :** $2b+1\neq 0\wedge a-3\neq 0$ dunque **C.E.:** $b\neq -\frac{1}{2}\wedge a\neq 3$ **.**

Il prodotto è la frazione algebrica: $f=-\frac{3a}{2b+1}\cdot\frac{10b}{a-3}=-\frac{30ab}{(2b+1)\cdot(a-3)}$ in cui non è lecita alcuna semplificazione.

ATTENZIONE il passaggio di semplificazione qui a lato **contiene un errore**: la variabile *a* mentre è un fattore del numeratore, è un addendo nel denominatore e così la variabile *b*.

$$f=-\frac{3\cancel{a}}{2\cancel{b}+1}\cdot\frac{10\cancel{b}}{\cancel{a}-3}$$

<u>Esempio</u>

Determinare il prodotto delle frazioni algebriche in cui numeratori e denominatori sono polinomi: $f_1=\frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}$ e $f_2=\frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}$

- 1° passo: scomponiamo in fattori tutti i denominatori (servirà per la determinazione delle C.E.) e tutti_i numeratori (servirà per le eventuali semplificazioni)

$$f_1=\frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{x\cdot(2x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)} \quad e \quad f_2=\frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}=\frac{5\cdot(x-1)}{x\cdot(2x-1)^2}$$

- 2° passo: Poniamo le C.E. ricordando che tutti i fattori dei denominatori devono essere diversi da zero: C.E.: $x-1\neq 0\wedge x-2\neq 0\wedge x\neq 0\wedge 2x-1\neq 0$ da cui C.E.: $x\neq 1\wedge x\neq 2\wedge x\neq 0\wedge x\neq \frac{1}{2}$
- 3° passo: determiniamo la frazione prodotto, effettuando le eventuali semplificazioni:

$$f=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)}\cdot\frac{5\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cdot(2x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{5}{(x-2)\cdot(2x-1)}$$

333 Determinate il prodotto delle frazioni algebriche completando le parti mancanti

$$f_1=\frac{a^2-b^2}{3x-3y} \quad e \quad f_2=\frac{6x^3y-6xy^3}{a^2x-a^2y+b^2y-b^2x}$$

- I° passo: scomponi in fattori tutti i denominatori
  $d_1=3x-3y=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
  $d_2=a^2x-a^2y+b^2y-b^2x=a^2\cdot(\ldots-\ldots)-\ldots\cdot(x-y)=(x-\ldots)\cdot(a^2-\ldots)=(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$
  scomponi in fattori tutti i numeratori $n_1=a^2-b^2=\ldots\ldots\ldots\ldots$
  $n_2=6x^3y-6xy^3=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- II° passo: poni le **C.E.** ricordando che tutti i fattori dei denominatori devono essere diversi da zero: **C.E.: …………………..**
- III° passo: determina la frazione prodotto, effettuando le eventuali semplificazioni:

$$f=\frac{a^2-b^2}{3x-3y}\cdot\frac{6x^3y-6xy^3}{a^2x-a^2y+b^2y-b^2x}=\frac{(\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots)}{3\cdot(\ldots\ldots)}\cdot\frac{6xy\cdot(\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots)}=\frac{2\ldots\ldots\cdot(x\ldots\ldots)}{(x-y)}$$

*Determinate i seguenti prodotti, indicando sempre le **C.E.**:*

334 $\frac{3x-6y}{5xy^3}\cdot\frac{2x^2y^2+xy^3}{4y^2-x^2}$ R. $\frac{-3(2x+y)}{5y(x+2y)}$

335 $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}\cdot\frac{x}{x^3-4x}$ R. 1

336 $\frac{4x-2a}{x-a}\cdot\frac{3a-3x}{a-2x}$ R. [6]

337 $\frac{-1-2a-a^2}{1+a^2-2a}\cdot\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^4+2a^3-2a-1}$; R. $-\frac{1}{a+1}$

338 $\frac{2a^4+6a+12+4a^3}{16-a^4}\cdot\frac{a^2-7a+10}{5a^5+15a^2}$ R. $\frac{-2(a-5)}{5a^2(a^2+4)}$

339 $\frac{-45x^7}{y^{-2}}\cdot\frac{4y^{-7}}{36x^{-1}}$ R. $-5\frac{x^8}{y^5}$

340 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$ R. $\frac{x+1}{x-1}$

341 $\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x}$ R. $\frac{1}{x}$

342 $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{ax+x}{x^2+x}$ R. $a+1$

343 $\frac{4x^3-4x^2-x+1}{8x^3-1}\cdot\frac{4x^3+2x^2+x}{2x^2-x-1}$ R. x

344 $\frac{x^2-x-6}{2x^2-8x+8}\cdot\frac{x^2+x-6}{x^3+2x^2-9x-18}$ R. $\frac{1}{2(x-2)}$

345 $\frac{x^4-1}{x^2-2x+1}\cdot\frac{2x^2-x-1}{2x^3+x^2+2x+1}\cdot\frac{2x^2-2x+2}{x^3+1}$ R. 2

►5. Potenza di una frazione algebrica

La potenza di esponente n, naturale diverso da zero, della frazione algebrica $\frac{A}{B}$ con B ≠ 0 (C.E.) è la frazione avente per numeratore la potenza del numeratore e per denominatore la potenza del denominatore:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}.$$

<u>Esempio</u>

Calcoliamo f^3 , dove $f=\frac{x-2}{x^2-1}$.

Innanzi tutto, prima di calcolare la potenza, indichiamo le C.E. per la frazione assegnata.

$f=\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+1)}$ con C.E.: $(x-1)(x+1)\neq 0$ da cui C.E. $x\neq 1\wedge x\neq -1$ dunque si ha

$f^3=\frac{(x-2)^3}{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}$ con le condizioni poste.

Casi particolari dell'esponente

Se **n = 0** sappiamo che qualsiasi numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1; lo stesso si può dire se la base è una frazione algebrica, purché essa non sia nulla.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^0=1 \quad con \quad A\neq 0 \quad e \quad B\neq 0$$

<u>Esempio</u>

Quali condizioni devono rispettare le variabili affinché si abbia $\left(\frac{3a-2}{5a^2+10a}\right)^0=1$?

Per rispondere alla domanda dobbiamo individuare le C.E. e i valori della variabile per i quali la frazione è diversa da zero.

- Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore della frazione: $f=\frac{3a-2}{5a\cdot(a+2)}$
- Determiniamo C.E. Poniamo $a\neq 0\wedge a+2\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq 0\wedge a\neq -2$.
- Poniamo la condizione affinché la frazione non sia nulla, ricordando che questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero; indichiamo con **C₀** questa condizione dunque

  C_0 : $3a-2\neq 0$ da cui **C_0 :** $a\neq\frac{2}{3}$.
- Le condizioni di esistenza sono allora $a\neq -2\wedge a\neq 0\wedge a\neq\frac{2}{3}$.

Quindi la variabile *a* deve rispettare le Condizioni di Esistenza sopra determinate affinché sia vera l'uguaglianza proposta.

Se **n è intero negativo** sappiamo che la potenza con base diversa da zero è uguale alla potenza che ha per base l'inverso della base e per esponente l'opposto dell'esponente; lo stesso può dirsi se la base è una frazione algebrica diversa da zero:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\left(\frac{B}{A}\right)^{+n} \quad con \quad A\neq 0 \quad e \quad B\neq 0$$

Esempio

Determiniamo f^{-2} con $f=\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}$.

- Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore della frazione:
  $f=\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}=\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}$
- Determiniamo C.E.:
  Poniamo $x \neq 0$ e $x^2+1 \neq 0$ da cui C.E.: $x \neq 0$ essendo l'altro fattore diverso da zero per qualunque valore della variabile in quanto somma di numeri positivi

Determiniamo la frazione inversa di f ;

Per poterne fare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché non sia nulla e questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero, quindi si deve avere $\mathbf{C_0=(x+2)\cdot(x+3)\neq 0}$ da cui $\mathbf{C_0 = x \neq -2 \text{ e } x \neq -3}$.

Aggiorniamo le condizioni C.E. : $x \neq 0$ e $x \neq -2$ e $x \neq -3$

Con queste condizioni l'operazione richiesta ha come risultato:

$$f=\left(\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2}=\left(\frac{x\cdot(x^2+1)}{(x+2)\cdot(x+3)}\right)^2=\frac{x^2\cdot(x^2+1)^2}{(x+2)^2\cdot(x+3)^2}$$

Osservazioni:

Con le dovute condizioni, nell'insieme delle frazioni algebriche valgono le proprietà delle potenze viste nell'insieme dei razionali.

Con le dovute condizioni, se è possibile, si possono ridurre le frazioni ai minimi termini prima di procedere nello svolgimento di un calcolo proposto.

Determina, con le dovute condizioni sulle variabili, le seguenti frazioni

346 $\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)^2$ $\qquad$ $\left(\frac{x+y}{x^2-y^2}\right)^3$

347 $\left[\left(\frac{12ab}{a^{2b}-ab^2}\right)^2\cdot\left(\frac{a-b}{2a^2}\right)^{-2}\right]^{-1}$ $\qquad$ $\left[\left(\frac{x^2+x}{x^2+4x+3}\right)^2\cdot\left(\frac{2x}{x+3}\right)\right]^2$

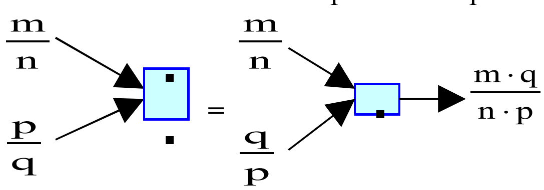
348 $\frac{a^2-b^2}{a^3+ab^2+2a^2b}\cdot\left(\frac{5a^2-5ab}{4ab+4b^2}\right)^{-1}$ $\qquad$ $\left(\frac{a^2-9}{12a^2-12a+3}\right)\cdot\left(\frac{12a^3-6a^2}{a^2-4a+3}\right)^3$

349 È vero che per $t=-\frac{15}{17}$ la frazione $f=\left(\frac{t^2-1}{1+2t+t^2}\cdot\frac{3t+3}{4-4t}\right)^4$ assume il valore 16 ?

►6. Divisione di frazioni algebriche

Il quoziente di due frazioni F e f con f diversa da zero è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima (F) con l'inverso della seconda (f^{-1}).

Lo schema di calcolo può essere illustrato nel modo seguente, come del resto abbiamo visto nell'insieme dei numeri razionali:



<u>Esempio</u> numerico

$\frac{5}{12}:\frac{7}{4}$

L'inversa di $\frac{7}{4}$ è la frazione $\frac{4}{7}$ dunque: $\frac{5}{12}:\frac{7}{4}=\frac{5}{\cancel{12}_3}\cdot\frac{\cancel{4}^1}{7}=\frac{5}{21}$.

Esempio

Determinare il quoziente delle frazioni algebriche: $f_1 = \frac{3a-3b}{2a^2 b}$; $f_2 = \frac{a^2-ab}{b^2}$

I° passo: scomponiamo in fattori tutti i numeratori e tutti i denominatori:

$f_1 = \frac{3a-3b}{2a^2 b} = \frac{3\cdot(a-b)}{2a^2 b}$; $f_2 = \frac{a^2-ab}{b^2} = \frac{a\cdot(a-b)}{b^2}$

II° passo: poniamo le **C**ondizioni d'**E**sistenza: $2a^2 b \neq 0 \wedge b^2 \neq 0$ da cui **C.E. :** $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

III° passo: determiniamo la frazione inversa di f_2;

Per poter determinare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché non sia nulla.
Questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero, quindi si deve avere **C_0 :**
$a \neq 0 \wedge a-b \neq 0$ da cui **C_0 :** $a \neq 0 \wedge a \neq b$ **.**

IV° passo: aggiorniamo le condizioni **C.E. :** $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b$ **.**

V° passo: cambiamo la divisione in moltiplicazione e semplifichiamo:

$$f = \frac{3\cdot(a-b)}{2a^2 b} : \frac{a\cdot(a-b)}{b^2} = \frac{3\cdot\cancel{(a-b)}}{2a^2\cancel{b}} \cdot \frac{b^{\cancel{2}}}{a\cdot\cancel{(a-b)}} = \frac{3b}{2a^3}$$

350 *Determinare il quoziente:* $f = \frac{x^2+x}{5x-10} : \frac{x+1}{20x}$

Procedi seguendo la procedura da completare:

1° passo: scomponi in fattori x^2+x = ……………….; $5x-10$ = ………………

2° passo: poni le C.E.: tutti i fattori dei denominatori diversi da zero: C.E.: …………………

3° passo: determina la frazione inversa del divisore, poni la condizione che il numeratore della frazione divisore sia diverso da zero **C_0** : ……………………………………

4° passo: aggiorna le **C.E.: ……………………..**

5° passo: cambia la divisione in moltiplicazione

$f = \frac{x^2+x}{5x-10} : \frac{x+1}{20x} = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \cdot \frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots}$

6° passo: semplifica

7° passo: verificare il risultato $f = \frac{4x^2}{x-2}$

Semplificare le seguenti espressioni, evidenziando sempre le ***C.E.****:*

351 $\frac{4x^3-4x^2-8}{4x^2-16} : \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

352 $\left(\frac{a^3-a^2}{2a^2+a-1} \cdot \frac{a^2-2a-3}{a^2-2a+1}\right) : \left(\frac{a^2-9}{12a^2-12a+3} \cdot \frac{12a^3-6a^2}{a^2-4a+3}\right)$ R. $\left[\frac{a-3}{2a+6}\right]$

353 $\frac{a^2-b^2-a-b}{3a^2-3b^2} : \left(\frac{a^2-ab}{3a^2} \cdot \frac{5a+5ab-5a^2}{a^2-2ab+b^2}\right)$ R. $\frac{-1}{5}$

354 $\left(\frac{-2a}{b^3} \cdot \left(\frac{-ab}{4}\right)^2\right) : \left(\frac{a^2}{2b^3}\right)^{-2}$ R. $\left[\frac{-a^7}{32b^7}\right]$

355 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} : \frac{x^2-x-6}{x^2-4}$ *R.* $\left[\frac{(x-2)^2}{x^2-9}\right]$

356 $\frac{x^2+ax-x-a}{x^2-1} : \frac{x^2+2x+1}{x^2+x+ax+a}$ R. $\left[\left(\frac{x+a}{x+1}\right)^2\right]$

357 $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3-3x^2-x+3}:\dfrac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$ *R.* $\dfrac{1}{2x+1}$

358 $\dfrac{xy+x+2y+2}{xy+2x-y-2}\cdot\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}:\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ *R.* $\dfrac{y+1}{y+2}$

►7. Addizione di frazioni algebriche

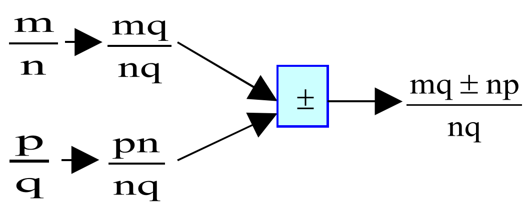
Proprietà della addizione tra frazioni algebriche

Nell'insieme delle frazioni algebriche la somma

- È commutativa: $f_1+f_2=f_2+f_1$
- È associativa: $(f_1+f_2)+f_3=f_1+(f_2+f_3)=f_1+f_2+f_3$
- Possiede l'elemento neutro, cioè esiste una frazione F° tale che: per qualunque frazione f si abbia F° + f = f + F°= f e F° = 0
- Ogni frazione algebrica f, possiede la frazione opposta (-f) tale che (- f) + f = f + (- f) = F° = 0

Quest'ultima proprietà ci permette di trattare contemporaneamente l'operazione di addizione e di sottrazione, come abbiamo fatto tra numeri relativi; (+1) + (-2) omettendo il segno di addizione + e togliendo le parentesi diventa 1 – 2 ; (+1) – (-2) omettendo il segno di sottrazione – e togliendo le parentesi diventa 1 + 2. Come per i numeri relativi, quando si parlerà di somma di frazioni si intenderà "somma algebrica".

Lo schema di calcolo per addizionare due frazioni algebriche può essere illustrato nel modo seguente, come del resto abbiamo visto nell'insieme dei numeri razionali.



Esempio

$S=\dfrac{2x-3y}{x+y}+\dfrac{x+2y}{x+y}$

poniamo le C.E.: x + y ≠ 0 da cui C.E.: x ≠ -y

$S=\dfrac{2x-3y}{x+y}+\dfrac{x+2y}{x+y}=\dfrac{(2x-3y)+(x+2y)}{x+y}=\dfrac{3x-y}{x+y}$.

Osservazione

a questo caso ci si può sempre ricondurre trasformando le frazioni allo stesso denominatore. Si potrebbe scegliere un qualunque denominatore comune, ad esempio il prodotto di tutti i denominatori, ma, come abbiamo operato in **Q**, scegliamo il m.c.m dei denominatori delle frazioni addendi.

Procedura per trasformare le frazioni allo stesso denominatore

1. si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni

2. si trasforma ciascuna frazione come segue:

2a. il nuovo denominatore è il m.c.m. trovato

2b. il nuovo numeratore si ottiene dividendo il m.c.m. per il denominatore della frazione assegnata e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione assegnata.

Esempio

Si vuole determinare la seguente somma algebrica: $\dfrac{x+y}{3x^2y}-\dfrac{2y-x}{2xy^3}$

I due addendi hanno monomi al denominatore; dobbiamo trasformare le frazioni in modo che abbiano lo stesso denominatore:

1° passo: calcoliamo il m.c.m. $(3x^2y, 2xy^3)=6x^2y^3$

2° passo: poniamo le C.E.: $6x^2y^3\neq 0$ da cui C.E.: $x\neq 0$ e $y\neq 0$

3° passo: trasformiamo gli addendi allo stesso denominatore; l'operazione che dobbiamo eseguire diventa:

$S=\frac{2y^2\cdot(x+y)}{6x^2y^3}-\frac{3x\cdot(2y-x)}{6x^2y^3}$ si procede ora come nel primo esempio; la frazione somma ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma dei numeratori:
$S=\frac{2y^2\cdot(x+y)-3x\cdot(2y^2-x)}{6x^2y^3}=\frac{2xy^2+2y^3-6xy^2+3x^2}{6x^2y^3}=\frac{2y^3-4xy^2+3x^2}{6x^2y^3}$ in cui non è lecita alcuna semplificazione.

Esempio

Eseguiamo la seguente somma algebrica: $S=\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-2}{2x+x^2}+\frac{-4x}{x^2-4}$

Le frazioni addendi hanno polinomi al denominatore: dobbiamo trasformare le frazioni ad avere lo stesso denominatore, dunque

1° passo: calcoliamo il m.c.m. dei denominatori

scomponiamo in fattori ciascun denominatore

$x^2-2x=x\cdot(x-2);\quad x^2+2x=x\cdot(x+2);\quad x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$

il m.c.m. è il prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con l'esponente maggiore:
$m.c.m.=x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

2° passo: poniamo le C.E.: $x\cdot(x+2)\cdot(x-2)\neq 0$ da cui C.E.: $x\neq 0$ e $x\neq 2$ e $x\neq -2$

3° passo: trasformiamo le frazioni ad avere come denominatore il m.c.m. trovato:

$$\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-2}{2x+x^2}+\frac{-4x}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}-\frac{(x-2)^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}+\frac{-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$$

4° passo: scriviamo la frazione risultato avente come denominatore il denominatore comune e come numeratore la somma dei numeratori: $=\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$

(questi due passi possono essere eseguiti contemporaneamente)

5° passo: eseguiamo le operazioni al numeratore, riducendo i monomi simili:

$$=\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{8x-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$$

6° passo: semplifichiamo se possibile la frazione ottenuta: $S=\frac{-4\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x}\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}=\frac{-4}{(x+2)}$

359 *Esegui la seguente somma algebrica seguendo e completando i passi suggeriti:*

$$S=\frac{x}{x-2}-\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{5x^2-7}{x^3-2x^2+2-x}$$

1° passo: calcola il m.c.m. dei denominatori

Scomponi i denominatori: $(x-2)$, $(x+1)$ e $(x-1)$ sono irriducibili,

$x^3-2x^2+2-x=x^2\cdot(x-2)-1\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x^2-1)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

determina il m.c.m.= …………………………

2° passo: le C.E.: ……………………..

3° passo: trasforma gli addendi allo stesso denominatore:

S = …………………- ……………+ …………………… - ……………………..

4° passo: scrivi la frazione risultato avente come denominatore il denominatore comune e come numeratore la somma dei numeratori:

$$\frac{x\cdot\ldots\ldots-\ldots\ldots\cdot(x-1)+\ldots\ldots-(5x^2-7)}{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=$$

5° passo: eseguite le operazioni al numeratore, riducendo i monomi simili

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=$$

6° passo: semplificate se possibile la frazione ottenuta ....$=\frac{-7}{(x-2)\cdot(x+1)}$

360 *Verificare che la somma* $S=\frac{z+1}{4z-4}+\frac{1+z}{z^2-4z+3}-\frac{3-z}{4-4z}$ *assume valore* $-\frac{4}{3}$ *se* $z=\frac{3}{2}$

361 *Possiamo affermare che per qualunque valore attribuito alle variabili la somma* $S=\frac{b+1}{a^2+ab+a}-\frac{1}{a}+\frac{a+1-b}{a^2+2a+1-b^2}$ *vale zero?*

Vero o falso? Se falso calcola il risultato corretto

362 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{y^2+x^2}{x^2+y^2}=1$ V F

363 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{1+x}{x^2}$ V F

364 $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{x-y+x+y}{x^2-y^2}=\frac{2x}{x^2-y^2}$ V F

365 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}=\frac{-y+1}{x-y}$ V F

366 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{2}{x-1}$ V F

367 $1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x+1}=1$ V F

368 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}=\frac{1+1}{a-b}$ V F

369 $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}$ V F

370 $x-\frac{y}{x+y}=\frac{x^2+xy-y}{x+y}$ V F

Riduci le seguenti somme fra frazioni algebriche

371 $\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{x^2y^2}$ *R.* $\frac{x+y-1}{x^2y^2}$

372 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}$ *R.* $\frac{7}{6x}$

373 $\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2-a}-\frac{1}{a-1}$ *R.* $\frac{1}{a}$

374 $\frac{a-1}{a^2-a}+\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a}$ *R.* $\frac{2}{a(a-2)}$

375 $\frac{2}{a-1}+\frac{3}{1-a}+\frac{a}{a-1}$ *R.* 1

376 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-1}+x$ *R.* x

377 $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}$ *R.* $-\frac{1}{x^2-x}$

378 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}$ *R.* $\frac{2x+1}{x^2-4}$

379 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}$ *R.* $\frac{2}{x-2}$

380 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+ab-b-1}$ *R.* $\frac{a+b+1}{(a-1)(b+1)}$

381 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1}$ *R.* $\frac{x}{(x-1)^2}$

382 $\frac{2x-3}{x}+\frac{-2x}{2x+3}-1$

383 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x^3-3x^2+3x-1}$ R. $\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3}$

384 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}$ R. $\frac{x(x+1)}{x^3-1}$

385 $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{2a^2-a-1}$ R. $\frac{3a+1}{2a^2-a-1}$

386 $\frac{3x}{x^2-2xy+y^2}-\frac{3}{x-y}+\frac{9}{2y-2x}$ R. $\frac{3(5y-3x)}{2(x-y)^2}$

387 $\frac{24x}{x^2+3x-4}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}-\frac{18(x-1)}{x^2+2x-8}$ R. $\frac{7(x+1)}{(x+4)(x-1)}$

388 $\frac{2}{x^2-9x+20}-\frac{2}{25-x^2}-\frac{4}{x^2+x-20}$ R. $\frac{22}{(x+5)(x-5)(x-4)}$

389 $\frac{4ay-4a^2}{y^3+8a^3}+\frac{1}{y+2a}-\frac{y-a}{y^2-2ay+4a^2}$ R. $\frac{a}{y^2-2ay+4a^2}$

390 $\frac{8x-12}{4x^2-12x+9}-\frac{5x}{2x^2+3x}-\frac{20x}{9-4x^2}$ R. $\frac{9}{2x-3}$

391 $\frac{x^2-2x+3}{x^3+1}+\frac{x-2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}$ R. $\frac{x^2-2x}{x^3+1}$

392 $\frac{t^2-1}{4+t^2}-\frac{4z-1}{2z+1}+\frac{24z-4t^2-2t^2z}{2t^2z+t^2+8z+4}$

393 $\frac{1}{xy+yz-y^2-xz}-\frac{1}{zx+zy-xy-z^2}-\frac{1}{xy-x^2-yz+xz}$

►8. Espressioni con le frazioni algebriche

In questo paragrafo, attraverso la soluzione guidata di alcuni esercizi, faremo vedere come semplificare espressioni contenenti somme algebriche, moltiplicazioni, divisioni e potenze i cui termini sono frazioni algebriche.

394 $f=\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{5}{2x^2-2}-\frac{x+3}{2x+2}\right):\frac{3}{4x^2-4}$

Analisi preliminare: f si ottiene dividendo la somma algebrica S per la frazione F’

$$f=\underbrace{\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{5}{2x^2-2}-\frac{x+3}{2x+2}\right)}_{\mathbf{S}}:\underbrace{\frac{3}{4x^2-4}}_{\mathbf{F'}}$$

Scomponiamo tutti i denominatori degli addendi per poterne calcolare il m.c.m.; scomponiamo numeratore e denominatore di F’ per poter eseguire la divisione.

Riscriviamo:

$$f=\left(\underbrace{\frac{x+1}{2\cdot(x-1)}+\frac{5}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{x+3}{2\cdot(x+1)}}_{\text{m.c.m.}=2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}\right):\frac{3}{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

Poniamo le C.E.: $2\cdot(x+1)\cdot(x-1)\neq 0$, condizioni che rendono definita anche F’, che non si annulla mai avendo il numeratore indipendente dalla variabile. Per cui:C.E.: $x\neq-1$ e $x\neq+1$.

Procediamo nella soluzione della somma e cambiamo la divisione in moltiplicazione

$$f=\left(\frac{(x+1)\cdot(x+1)+5-(x+3)\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\right)\cdot\frac{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{3}=$$

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{3}=$$

eseguite i calcoli al numeratore della prima frazione, semplificate e verificate il risultato: f=6.

395 $f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$

Analisi preliminare: f si ottiene sommando i tre termini f_1, f_2, f_3. Dove f_2 è il quoziente di due somme:

$$f=\underbrace{\frac{a-3}{a+3}}_{f_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3}\right)}_{f_2}-\underbrace{\frac{1}{3}}_{f_3}$$

Per semplificare f_2 dobbiamo innanzi tutto eseguire le somme nelle parentesi; determiniamo il m.c.m. e poniamo le C.E. $3\cdot a\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq 0$

$$f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{3-a}{3a}\right):\left(\frac{3+a}{3a}\right)-\frac{1}{3}$$

per eseguire la divisione poniamo C_0: $3+a\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq -3$. Aggiornate le C.E. … … … … .

Cambiamo la divisione in moltiplicazione e semplifichiamo:

$$f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{3-a}{3a}\right)\cdot\left(\frac{3a}{3+a}\right)-\frac{1}{3}=\frac{a-3}{a+3}+\frac{3-a}{a+3}-\frac{1}{3}$$

completatate l'operazione e verificate il risultato $f=-\frac{1}{3}$.

396 $E=\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a^2+1}\right)\cdot\frac{a^3-a^2+a-1}{2a^2}+\frac{a}{1+a}$

Analisi preliminare: E si ottiene dalla somma di due frazioni algebriche $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$; f_1 è il prodotto della somma **s** con la frazione **f** come dallo schema sottostante

$$E=\underbrace{\underbrace{\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a^2+1}\right)}_{s}\cdot\underbrace{\frac{a^3-a^2+a-1}{2a^2}}_{f}}_{f_1}+\underbrace{\frac{a}{1+a}}_{f_2}$$

Risolviamo la somma **s** e scomponiamo il numeratore di **f**:

$$E=\left(\frac{a}{(a-1)\cdot(a+1)}-\frac{a}{a^2+1}\right)\cdot\frac{a^2\cdot(a-1)+(a-1)}{2a^2}+\frac{a}{1+a}=$$

$$=\left(\frac{a^3+a-a^3+a}{(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a^2+1)}\right)\cdot\frac{(a-1)\cdot(a^2+1)}{2a^2}+\frac{a}{1+a}=$$

mettiamo le C.E.: $a-1\neq 0$, $a+1\neq 0$ e $a^2+1\neq 0$; per il fattore a^2+1 non mettiamo alcuna condizione perché è una somma di quadrati, quindi sempre diversa da zero.
Quindi C.E.: …...

sommiamo i monomi simili al numeratore, semplifichiamo i fattori uguali:

$$=\frac{2a}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}\cdot\frac{(a-1)(a^2+1)}{2a^2}+\frac{a}{1+a}=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{a}{1+a}=\frac{1+a^2}{a(a+1)}$$

Nell'esercizio che segue, lasciamo a voi il completamento di alcuni passaggi:

397 $F=\frac{x^3-25x}{x^2+8x+15}:\left(\frac{x}{2x+6}+\frac{2}{3-x}+\frac{6+x}{x^2-9}\right)$

Analisi preliminare: F è il quoziente tra …………………………………………..

$$F=\frac{x\cdot(x+\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots\ldots)\cdot(x+5)}:\left(\frac{x}{2\cdot(x+\ldots\ldots)}+\frac{2}{3-x}+\frac{6+x}{(x+\ldots\ldots)\cdot(x-\ldots\ldots)}\right)$$

Mettete le C.E. per il dividendo: ……………………………………….

Calcolate il m.c.m. per eseguire la somma nel divisore: m.c.m. = …………………….. , mettete le C.E. per il denominatore: ……………………………………………………………

$$F=\frac{x\cdot(x+\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots\ldots)\cdot(x+5)}:\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{2\cdot(x+\ldots\ldots)\cdot(x-\ldots\ldots)}\right)$$ eseguite i calcoli al numeratore, ponete la **condizione per eseguire la divisione: C_0** : …………………

Aggiornate le **C**ondizioni di **E**sistenza: ….......................................

Completate il calcolo e verificare il risultato $E=2\cdot(x-3)$

398 $E=\left(\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\right)\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$

Analisi preliminare**:** L'espressione E è nelle due variabili a e x; essa rappresenta il prodotto tra un quoziente di frazioni algebriche e una frazione algebrica.

1° passo: scomponiamo in fattori tutti i numeratori e tutti i denominatori

$$E=\left(\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\right)\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}=\left(\frac{x^2\cdot(x-a)\cdot(x+a)}{a^2\cdot(2x+a)^2}:\frac{x\cdot(x+a)}{ax\cdot(2x+a)}\right)\cdot\frac{a^2\cdot(2x+a)}{x\cdot(x-a)}$$

2° passo: determiniamo **C.E.**

C.E. : $a\neq 0$ e $2x+a\neq 0$ e $x\neq 0$ e $x-\mathbf{a}\neq 0$ quindi C.E.: …......................

3° passo: determiniamo la frazione inversa del divisore, ponendo la C_0 sul suo numeratore: C_0 : $x\neq 0$ e $x+a\neq 0$ da cui C_0 : …………….

Aggiornate le condizioni: C.E.: …..

4° passo: completate il calcolo e verificate il risultato: E = ax

$$E=\left(\frac{x^2\cdot(x-a)\cdot(x+a)}{a^2\cdot(2x+a)^2}\cdot\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)\cdot\frac{a^2\cdot(2x+a)}{x\cdot(x-a)}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

399 *Quale delle seguenti espressioni ha lo stesso significato e dunque lo stesso risultato dell'espressione E dell'esercizio precedente? E=ax*

$$E_1=\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$$

$$E_2=\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\left(\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}\right)$$

$$E_3=\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}:\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$$

Semplificate le espressioni ricordando l'analisi preliminare e ponendo sempre le condizioni di esistenza:

400 $\left(\frac{2a^2+a}{a^3-1}-\frac{a+1}{a^2+a+1}\right)\cdot\left(1+\frac{a+1}{a}-\frac{a^2+5a}{a^2+a}\right)$ R. $\left[\frac{a-1}{a^2+a}\right]$

401 $\left(\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}\right):\left(1-\frac{x-a}{x+a}\right)^2$ R. $\left[\frac{x(a+x)}{a(x-a)}\right]$

402 $\frac{a^2b^2}{a^4-ab^3+a^3b-b^4}:\left(\frac{a+b}{a^3-b^3}-\frac{1}{a^2-b^2}\right)$ R. $[ab]$

403 $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right):\left(\frac{z^3-z^2}{z-5}:\frac{z^5-z^3}{2z-10}\right)$ R. $\left[\frac{1}{2}\right]$

404 $\frac{x+y}{x^2+x+xy+y}-\frac{1}{y+1}+\frac{x}{x+1}$ R. $\left[\frac{y}{y+1}\right]$

405 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-a^3}-1\right)$ R. $\left[\frac{1}{1-a}\right]$

406 $1-\frac{a+b}{a-b}\cdot\left(\frac{2a-b}{a+b}-\frac{a-b}{a}\right)$ R. $\left[\frac{b^2}{a(b-a)}\right]$

407 $\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)\frac{a^2-1}{2a}$ $R.$ 1

408 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\frac{a^2-1}{2a}$ $R.$ $\frac{a^2+1}{2a(a-1)}$

409 $\left(\frac{1}{a^2-2a+1}+\frac{1}{a^2-3a+2}\right):\frac{4a^2-6a}{1-a}$ $R.$ $\frac{-1}{2a(a-1)(a-2)}$

410 $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{x}{x-1}\right)\frac{ax^2-ax-a^2x+a^2}{ax-x^2}$ $R.$ $\left[\frac{a(a-1)}{a-x}\right]$

411 $\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2-a}\right)-\frac{1}{a-2}\right]:\frac{1+a+a^2}{1-a^3}$ $R.$ $\frac{1}{a-2}$

412 $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)+\frac{x-y}{x}$ $R.$ $\frac{x-y}{x+y}$

413 $\left(\frac{a^2+1}{2a}-1\right):\frac{a^2-3a+2}{4a}:\frac{a^2+a-2}{a^2-4}+\frac{a^2+1}{a}$ $R.$ $\frac{(a+1)^2}{a}$

414 $\left[\left(\frac{1}{a^2+9-b^2+6a}-\frac{1}{a^2+9+b^2+6a-2ab-6b}\right):\frac{-6b}{3a+9+3b}\right]^{-1}$ $R.$ $(a+3-b)^2$

415 $\left(\frac{3}{x^6-x^3}-\frac{1}{9x^3-9}\right):\frac{9+x^2+3x}{3x^5+3x^3+3x^4}+\frac{6x-5}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{12}{x^2+x-2}$ $R.$ $\frac{14x+3}{3(x-1)}$

416 $\left(\frac{1}{2b-2-a+ab}+\frac{1}{1-b}\right):\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{2+a+2b+ab}\right)+\frac{2b^2-b-1}{b^2-2b+1}$ R. $\left[\frac{b}{b-1}\right]$

417 $\frac{\frac{x^{3n}-y^{3n}}{x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n}}}{\frac{2x^{2n}-4x^ny^n+2y^{2n}}{x^{2n}-y^{2n}}}+\frac{1}{2}(x^n-y^n)-\frac{x^ny^n}{2(x^n+y^n)}$ $R.$ $\frac{x^{2n}}{x^n+y^n}$

418 $\frac{\frac{x^ny+x^{n+1}+y^{n+1}+xy^n}{x^{n+1}-x^ny-xy^n+y^{n+1}}}{\frac{x^n+y^n}{x^n-y^n}}-\frac{\frac{x^3}{x^3-y^3}}{\frac{x^2}{x^2+y^2+xy}}$ $R.$ $\frac{y}{x-y}$

419 $\frac{\frac{1}{x^2-25+20y-4y^2}-\frac{1}{x^2-25+4y^2+4xy}}{\frac{x^2-4y^2}{x^2+25+10x-4y^2}}\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}-\frac{5}{4}\right):\frac{1}{\frac{x}{y}-2}$ $R.$ $\frac{1}{x+2y}$

420 $\dfrac{\dfrac{x^{n+1}+xy-x^n y-y^2}{x^{2n}-y^2}}{\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{x^{n-1}-\dfrac{y}{x}}}-\left(-\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{1}{\dfrac{ax+2x+ay+2y}{2y+2x}}\right)$ $\qquad R.\ \dfrac{x}{x+y}$

421 $\dfrac{\left(\dfrac{x^3-b^3}{x^3-3bx^2+3b^2x-b^3}-\dfrac{bx}{x^2-2bx+b^2}+\dfrac{x+b}{b-x}\right):\left(\dfrac{x+b}{x-b}+1\right)}{\dfrac{x^2-bx-6b^2}{x^2+bx-2b^2}}:\dfrac{b}{x}$ $\qquad R.\ \dfrac{b}{x-3b}$

422 È vero che per qualunque a≠0 e b≠0 l'espressione $P=\left(\dfrac{4a^2-1}{8a^3b}:\dfrac{2a+1}{4a^4b}\right)\cdot\left(\dfrac{2a^5}{6a-3}:\dfrac{a^2}{27}\right)$ è sempre positiva?

423 Assegnata l'espressione $Q=\dfrac{4-\left(a^2-2ab+b^2\right)}{b-2-a}:\left(\dfrac{4-2a+2b}{3a^2}:\dfrac{2}{a^3}\right)$, quali condizioni dobbiamo porre alla variabile b affinché sia vera la proposizione “Per a = 3, l'espressione Q assume il valore –1.”?

Copyright

Autori
Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Angela D'Amato: teoria, esercizi
Francesco Daddi: teoria, esercizi
Germano Pettarin: esercizi
Alessandro Paolino: esercizi
Claudio Carboncini: teoria
Gemma Fiorito: correzioni
Luciano Sarra: correzioni
Antonio Bernardo: coordinatore

Collaborazione, commenti e suggerimenti
Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3, o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento
Versione 3.0 del 10.04.2010