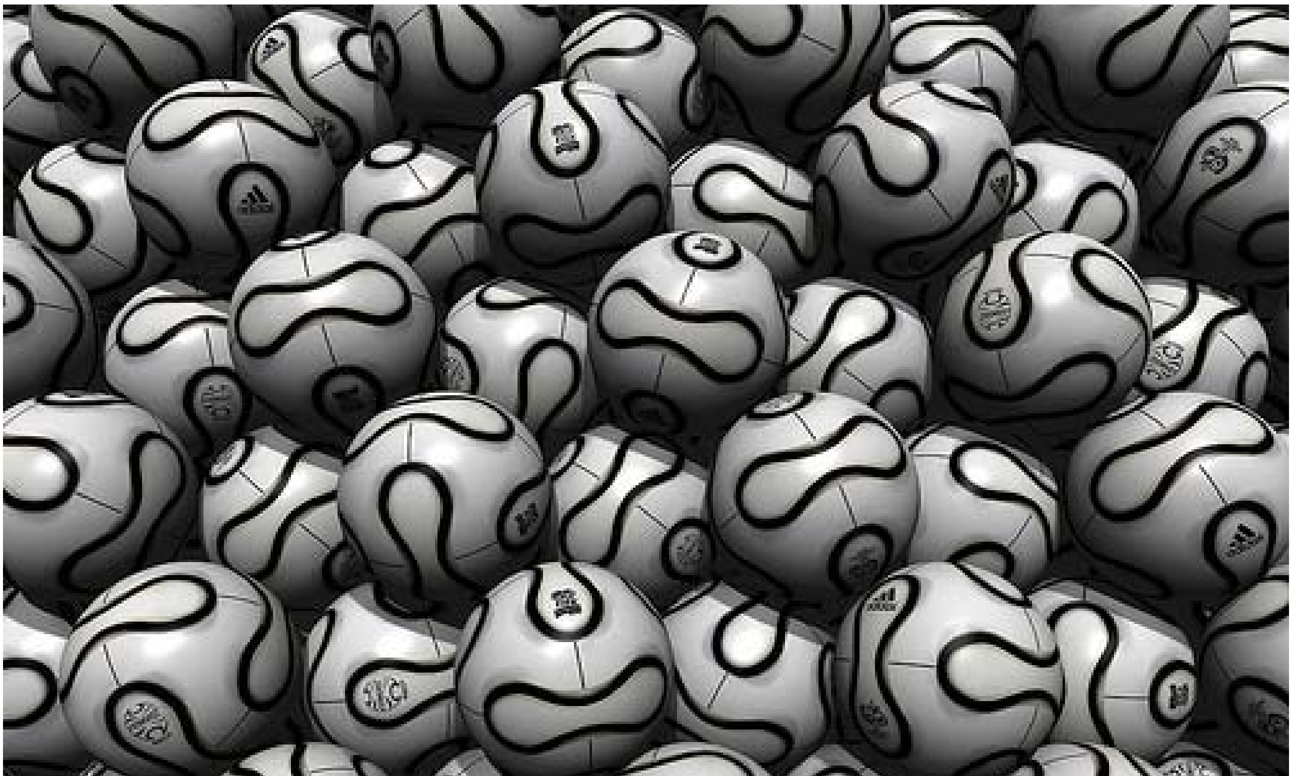
MATEMATICA C^3

ALGEBRA 1

4. EQUAZIONI NUMERICHE INTERE



FIFA FCC Packing
foto by: fdecomite
take fron: http://www.flickr.com/photos/fdecomite/2624192405/

1. IDENTITÀ ED EQUAZIONI, PRINCIPI DI EQUIVALENZA

►1 Identità ed equazioni

Analizziamo le proposizioni:

a) “cinque *è uguale* alla differenza tra sette e due”
b) “la somma di quattro e due *è uguale* a otto”
c) “il doppio di un numero naturale *è uguale* alla differenza tra nove e il numero stesso”
d) “la somma di due numeri interi *è uguale* a dieci”

Notiamo che tutte sono costruite con il predicato “essere uguale a”; riscriviamo in formula ciascuna di esse:

a) 5=7-2; b) 4+2=8; c) 2x=9-x; d) x+y=10

e notiamo che le prime due contengono solamente numeri, le seconde contengono anche variabili.
Le formule del primo tipo si dicono **chiuse** e di esse si può subito stabilire il valore di verità; così in N la formula 5 = 7 - 2 è vera mentre 4 + 2 = 8 è falsa.

DEFINIZIONE. Le **formule chiuse** costruite con il predicato “essere uguale” si chiamano **uguaglianze**; stabilito l’ambiente in cui vengono enunciate si può immediatamente stabilire il loro valore di verità.

Esempio

La formula chiusa 1 – 6 = -5 è un’uguaglianza vera se la consideriamo nell’insieme Z degli interi relativi, è falsa se la vediamo come sottrazione tra numeri naturali.

Le formule c) e d) che contengono variabili si dicono **aperte;** le variabili che compaiono sono chiamate **incognite**. Di tali formule non si può subito stabilire il valore di verità.
Quando alle incognite sostituiamo un numero, queste si trasformano in formule chiuse e allora possiamo stabilirne il valore di verità relativamente alla sostituzione effettuata.

Esempio

Nella formula 2x = 9 – x sostituiamo alla variabile x il valore zero; otteniamo
$2\cdot 0=9-0 \Rightarrow 0=9 \text{ FALSA}$; sostituiamo ora alla variabile x il valore tre; otteniamo
$2\cdot 3=9-3 \Rightarrow 6=6 \text{ VERA}$

Esempio

Nella formula x + y = 10 sostituiamo alle variabili coppie di numeri interi come x = 2 e y = 5; otteniamo $2+5=10 \quad \Rightarrow \quad 7=10 \quad \text{FALSA}$. Se sostituiamo x = 4 e y = 6 ci rendiamo subito conto che l’uguaglianza ottenuta è VERA, ma scopriamo anche che molte altre coppie di numeri interi rendono vera l’uguaglianza.

DEFINIZIONI
Le formule aperte costruite con il predicato essere uguale si chiamano **equazioni**; le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di uguaglianza si chiamano rispettivamente **primo membro e secondo membro**.
L’insieme dei valori che sostituiti alle incognite trasformano l’equazione in un’uguaglianza vera costituisce l’**insieme delle soluzioni** (I.S.) o più semplicemente le **soluzione** dell’equazione.

Affronteremo per ora equazioni in **una sola incognita** che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, comparirà a **grado 1** e i cui **coefficienti** sono **numeri razionali**.
Cercheremo la sua soluzione nell’insieme *Q* dei numeri razionali, salvo esplicita indicazione differente.

Esempi

- $x^2=1 \text{ con } x\in N$

Risulta vera solo se a *x* sostituiamo il valore 1; infatti 1 è l’unico numero naturale il cui quadrato è 1. L’insieme soluzione è {1}.

- b) $x^2=1 \text{ con } x\in Z$

Risulta vera se a *x* sostituiamo il valore 1 oppure il valore -1; infatti sia -1 che 1 elevati al quadrato danno 1. L’insieme soluzione è {-1, 1}.

- $x^2+1=0 \text{ con } x\in Q$

Essendo la formula a sinistra dell’uguale la somma di un quadrato con il numero 1, per ottenere 0 dovrebbe essere $x^2 = -1$ il che risulta impossibile nell'insieme dei numeri reali. L’insieme soluzione è quindi $\emptyset$.

- $2x+3=(3+x)+x$ con $x \in Q$
  Eseguendo il semplice calcolo al secondo membro, ci rendiamo conto che qualunque valore venga sostituito all'incognita l'uguaglianza risulta vera. L'insieme soluzione è Q.

In generale un'equazione in una incognita può essere:

- **determinata**: quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme proprio di Q;
- **impossibile**: quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme improprio di Q e precisamente è l'insieme vuoto Φ;
- **indeterminata o identità**: quando l'insieme soluzione coincide con Q.

Esempi

Analizziamo le equazioni: $a)\ 3 \cdot x=0;\quad b)\ 0 \cdot x=5;\quad c)\ 0 \cdot x=0$
Tutte e tre hanno la stessa struttura: il primo membro è il prodotto di un coefficiente numerico per un valore incognito, il secondo membro è un numero.
a) Per trovare l'insieme soluzione della prima cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per 3 dà come prodotto 0. Per la proprietà della moltiplicazione l'unico numero che rende vera l'uguaglianza è zero. Quindi l'insieme delle soluzioni è {0}. L'equazione è determinata.
b) Per trovare l'insieme soluzione della seconda cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per 0 dà come prodotto 5. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0, non otterremo mai 5. Quindi l'insieme soluzione è l'insieme vuoto. L'equazione è impossibile.
c) Per trovare l'insieme soluzione della terza cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0 qualunque sia l'altro fattore. Quindi l'insieme delle soluzioni è Q. L'equazione è indeterminata.

►2. Ricerca dell'insieme soluzione

In alcuni casi la soluzione di un'equazione si può trovare applicando le semplici proprietà delle operazioni.

Esempio

Analizziamo lo schema operativo dell'equazione $3x-1=17$ con $x \in N$.
Si opera sul valore incognito x per ottenere 17

$\textbf{entra}\ x\ \textit{si moltiplica per tre} \rightarrow 3 \cdot x\ \textit{si sottrae}\ 1 \rightarrow 3 \cdot x-1\ \textit{si ottiene}\ 17$.

Qual è il valore in ingresso?
Per determinare il valore in ingresso basterà ripercorrere lo schema effettuando le operazioni inverse:
$\textit{da}\ 17\ \textit{aggiungi}\ 1 \rightarrow 18\ \textit{dividi per tre} \rightarrow 18:3 \rightarrow x$
La soluzione dell'equazione è x = 6 e I.S. (insieme delle soluzioni) è { 6 }.

1 Risolvi in Z la seguente equazione: $-x+3=-1$.
Suggerimento. Lo schema operativo è: *entra x, cambia il segno in -x, aggiunge 3, si ottiene -1.*
Ora ricostruisci il cammino inverso: da -1 … … … … 3 ottieni -… … cambia segno … … ottieni come soluzione x = … …

Per risolvere un'equazione più complessa come $\left(\frac{1}{2}x+3\right) \cdot (-5+x)=12x+\frac{1}{2}x^2$ con $x \in Q$, non possiamo applicare il procedimento precedente; potremmo procedere per tentativi, sostituendo all'incognita uno o più valori scelti a caso e verificando se il valore del primo membro risulta uguale al valore assunto dal secondo membro. È evidente che questo procedimento raramente porterà a trovare tutte le soluzioni di un'equazione.

Per risolvere un'equazione cioè per determinare tutte le eventuali soluzioni si procede applicando i principi d'equivalenza.

DEFINIZIONE. Due equazioni sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme soluzione.

PRIMO PRINCIPIO**.** Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.

SECONDO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per un'espressione non nulla (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.

La forma più semplice di un’equazione di primo grado in un’incognita è:

$$\mathbf{x} = \textit{numero}$$

L'insieme delle soluzioni di una equazione di questo tipo è {numero}.
Per esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x = -3$ è l'insieme {-3}.
I principi sopra enunciati permettono di trasformare qualunque equazione nella forma canonica che ha lo stesso insieme soluzione di quella assegnata. Vediamo nel paragrafo che segue come si fa.

►3. Risoluzione di equazioni numeriche intere di primo grado

In questo paragrafo vedremo come usare i principi d’equivalenza prima enunciati per condurre un’equazione alla forma canonica e dunque determinarne la soluzione.

DEFINIZIONE. Risolvere un’equazione significa determinare il suo **I**nsieme **S**oluzione

Cominciamo con alcuni esempi.

Applicazione del 1° principio di equivalenza

Esempio

- $x-5=3$

sommo 5 a entrambi i membri: $x-5+5=3+5$ $\quad x=8$ $\quad$ I.S. = {8}

Esempio

- $3x=2+2x$

sottraggo 2x a entrambi i membri: $3x-2x=2+2x-2x$ $\quad x=2$ $\quad$ I.S. {2}

Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza

2	$x+2=7$	$2+x=3$	$16+x=26$
3	$x-1=1$	$3+x=-5$	$12+x=-22$
3	$3x=2x-1$	$8x=7x+4$	$2x=x-1$
5	$5x=4x+2$	$3x=2x-3$	$3x=2x-2$
6	$7+x=0$	$7=-x$	$-7=x$
7	$1+x=0$	$1-x=0$	$0=2-x$
8	$-5x+2=-6x+6$	$-2+5x=8+4x$	$3x-1=2x-3$
9	$7x+1=6x+2$	$-1-5x=3-6x$	$7x-2x-2=4x-1$

Applicazione del 2° principio di equivalenza

Esempio

- $3x=12$

divido entrambi i membri per 3, si ha $\frac{3}{3}x=\frac{12}{3}$ $\quad x=4$

- $\frac{1}{2}x=2$

moltiplichiamo entrambi i membri per 2, si ha $2\cdot\frac{1}{2}x=2\cdot 2$ $\quad x=4$

Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza

10	$2x=8$	$2x=3$	$6x=24$
11	$\frac{1}{3}x=-1$	$\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}x=12$
12	$3x=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}x=4$	$\frac{3}{4}x=\frac{12}{15}$

13 $3x=6$ $\quad \frac{1}{3}x=\frac{1}{3}$ $\quad \frac{2}{5}x=\frac{10}{25}$

Applicando entrambi i principi

Esempio

- $-2x+1=3x-5$

sottraggo 1 a entrambi i membri
$-2x+1-1=3x-5-1$
$-2x=3x-6$
sottraggo 3x a entrambi i membri
$-2x-3x=3x-3x-6$
$-5x=-6$
divido entrambi i membri per -5
$\frac{-5}{-5}x=\frac{-6}{-5}$
$x=\frac{6}{5}$

Risolvi le seguenti equazioni

14 $2x+1=7$ $\quad 3-2x=3$ $\quad 6x-12=24$

15 $3x+3=4$ $\quad 5-x=1$ $\quad 7x-2=5$

16 $2x+8=8-x$ $\quad 2x-3=3-2x$ $\quad 6x+24=3x+12$

17 $2+8x=6-2x$ $\quad 6x-6=5-x$ $\quad -3x+12=3x+18$

18 $3-2x=8+2x$ $\quad \frac{2}{3}x-3=\frac{1}{3}x+1$ $\quad \frac{6}{5}x=\frac{24}{5}-x$

19 $3x-2x+1=2+3x-1$ $\quad \frac{2}{5}x-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{10}$ $\quad \frac{5}{6}x+\frac{3}{2}=\frac{25}{3}-\frac{10}{2}x$

Esempio

Prendiamo l'equazione $(x+1)+3\cdot(2+x)=12x-1$ nella sola incognita x di primo grado a coefficienti numerici interi. Cerchiamo di trasformarla nella forma canonica "x = numero" applicando i principi di equivalenza.

- I° passo: svolgiamo i calcoli al primo e al secondo membro: $x+1+6+3x=12x-1$
- II° passo: sommiamo in ciascun membro i termini simili (se ce ne sono): $4x+7=12x-1$
- III° passo: sottraiamo ad ambo i membri il monomio 12x, applicando il primo principio: $4x-12x+7=12x-1-12x$, sommiamo i monomi simili al primo e al secondo membro e otteniamo $-8x+7=-1$.
- IV° passo: sottraiamo ad ambo i membri il numero 7, applicando il primo principio e sommiamo i termini simili: $-8x+7-7=-1-7 \rightarrow -8x=-8$
- V° passo: dividiamo ambo i membri per -8, applicando il secondo principio: $\frac{-8}{-8}x=\frac{-8}{-8} \rightarrow x=1$

L'equazione assegnata $(x+1)+3\cdot(2+x)=12x-1$ risulta equivalente all'ultima trovata x=1, pertanto il suo insieme soluzione è I.S. = {1}.

20 Risolvi l'equazione $10x+4=-2\cdot(x+5)-x$ seguendo la traccia:

1° passo: svolgi i calcoli al primo e al secondo membro … … … … … … … … … … …

2° passo: somma i monomi simili in ciascun membro dell'equazione: … … … … … … …

3° passo: applica il primo principio d'equivalenza per lasciare in un membro solo monomi con l'incognita e nell'altro membro solo numeri

… … … … … … … … … … … … … …

4° passo: somma i termini del primo membro e somma i termini del secondo membro:

… … … … … … … … … … … … … … …

5° passo: applica il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita:

… … … … … … … … … … … in forma canonica: … … … … … … … …

6° passo: scrivi l'Insieme Soluzione : I.S. = … … …

21 Risolvi, seguendo la traccia, l'equazione $x-(3x+5)=(4x+8)-4\cdot(x+1)$

1° svolgo i calcoli: … … … … … … … … … … … … … … … …

2° sommo i monomi simili: … … … … … … … … … … … … …

3° porto al primo membro i monomi con la x e al secondo membro quelli senza x

… … … … … = … … … … ...

4° sommo i monomi simili al primo membro e al secondo membro … … … = … … …

5° divido ambo i membri per il coefficiente dell'incognita … … = … ….

6° l'insieme soluzione è {… ...}

Osservazione

La trasformazione di un'equazione nella forma canonica prevede che il termine con l'incognita sia collocato da una parte del segno uguale mentre dall'altra parte sia posto il termine numerico.

Enunciamo alcune **regole pratiche** che ci possono aiutare nella procedura risolutiva e che scendono direttamente dal primo principio d'equivalenza:

Regole

- Spostando da un membro all'altro un addendo occorre cambiargli il segno; l'equazione ottenuta è equivalente a quella data.
- Se in entrambi i membri dell'equazione compare uno stesso addendo con lo stesso segno, esso può essere cancellato da entrambi i membri: l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.
- Se il coefficiente dell'incognita è -1, ossia l'equazione si presenta nella forma -*x*=*n*, si può cambiare di segno ai termini del primo e del secondo membro, per ottenere la forma x=-n e quindi I.S.={-n}. Cambiare di segno equivale a moltiplicare per -1 i due membri dell'equazione.

Proviamo a procedere applicando questa regola.

Esempio

- $5x+2\cdot(3-x)+1=-(4x-1)+2\cdot(6-x)$.

1° passo: svolgiamo i calcoli $5x+6-2x+1=-4x+1+12-2x$

2° passo: eliminiamo i termini uguali che compaiono nei due membri:

$5x+6\cancel{-2x}\cancel{+1}=-4x\cancel{+1}+12\cancel{-2x}$ otteniamo: $5x+6=-4x+12$

3° passo: spostiamo il monomio -4x del secondo membro a sinistra del segno uguale e il numero +6 da sinistra a destra; otteniamo $5x+4x=-6+12$

4° passo: sommando i termini simili nei due membri otteniamo $9x=+6$ da cui dividendo per 9 ambo i membri si ottiene $x=\frac{2}{3} \rightarrow I.S.=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

► 4. Equazioni a coefficienti frazionari

Vediamo, illustrando qualche esempio, come si procede:

Esempio

- $\frac{2}{3}x+4-\frac{1}{2}+2x=\frac{x+2}{3}-\frac{5}{2}x+1$.

Sappiamo che il secondo principio d'equivalenza ci permette di moltiplicare ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero per ottenere un'equazione equivalente alla data.

I° passo: calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(2,3) = 6

II° passo: moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{2}{3}x+4-\frac{1}{2}+2x\right)=6\left(\frac{x+2}{3}-\frac{5}{2}x+1\right)$

III° passo: eseguiamo i calcoli: $4x+24-3+12x=2x+4-15x+6$.

I coefficienti dell'equazione sono ora numeri interi, puoi procedere da solo come abbiamo visto negli esempi precedenti.

22 Risolvi l'equazione $\frac{3\cdot(x-11)}{4}=\frac{3\cdot(x+1)}{5}-\frac{1}{10}$.

- I° passo: calcola m.c.m.(4,5,10) = ………
- II° passo: moltiplica ambo i membri per …... e ottieni: … … … … … … … … … … ...
- III° passo: …

Equazioni in cui l'incognita compare con grado maggiore di 1

Esempio

- $(2x+1)\cdot(x-2)=2\cdot(x+1)^2-5x$

Prima di iniziare la procedura risolutiva analizziamo i membri dell'equazione: al primo membro compare il prodotto di due polinomi di primo grado, nel secondo il quadrato di un binomio di primo grado, pertanto l'incognita, eseguiti i calcoli comparirà a grado due. Apparentemente l'equazione è di secondo grado. Iniziamo la procedura risolutiva:

I° passo: svolgiamo i calcoli e otteniamo:
$2x^2-4x+x-2=2x^2+4x+2-5x \quad \rightarrow \quad 2x^2-3x-2=2x^2-x+2$

II° passo: applichiamo le regole pratiche eliminando i monomi uguali con l'incognita al secondo grado e otteniamo $-3x+x=+2+2$.
Abbiamo ottenuto un'equazione di primo grado; puoi procedere da solo e determinare la forma canonica e I.S.

III° passo … … … … … … … … … … … … … … I.S. = { }.

Equazioni in cui l'incognita scompare

Esempio

- $\frac{4}{5}-\frac{x}{2}=\frac{2-5x}{10}$

I° passo: Calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(5, 2, 10) = 10.

II° passo: Moltiplichiamo per 10 ambo i membri dell'equazione: $10\left(\frac{4}{5}-\frac{x}{2}\right)=10\left(\frac{2-5x}{10}\right)$.

III° passo: Eseguiamo i calcoli: $8-5x=2-5x$.

IV° passo: Applichiamo la regola pratica: $-5x+5x=2-8$ i monomi in x si annullano!

V° passo: Sommando i monomi simili si ottiene: $0\cdot x=-6$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte non esiste nessun numero che moltiplicato per zero dia come prodotto -6. Quindi I.S.$=\emptyset$, l'equazione risulta impossibile

Esempio

- $\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}=-\frac{x}{2}$

I° passo: Calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(6, 3, 2) = 6

II° passo: Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}\right)=6\left(-\frac{x}{2}\right)$

III° passo: Eseguiamo i calcoli : $x-4x=-3x$

IV° passo: Applicando il primo principio si ottiene $0\cdot x=0$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte per la proprietà della moltiplicazione qualunque numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Quindi I.S. = Q, l'equazione è indeterminata (identità).

Riassumendo:
La forma canonica di un'equazione di primo grado in una incognita a coefficienti numerici è $A\cdot x=B$ con A e B numeri razionali.
Possono presentarsi i casi:

- se $A\neq 0$ possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per A quindi $I.S.=\left\{\frac{B}{A}\right\}$. L'equazione è determinata.
- se $A=0$ non possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per A e si presentano due casi:
  - $B=0$ allora $I.S.=Q$. L'equazione è indeterminata.
  - $B\neq 0$ allora $I.S.=\emptyset$. L'equazione è impossibile

Lo schema precedente si può rappresentare anche con un grafo ad albero:

$A\cdot x=B$
- $A\neq 0$ $\rightarrow$ equazione determinata e $I.S.=\left\{\frac{B}{A}\right\}$
- $A=0$
  - $B=0$ $\rightarrow$ equazione indeterminata e $I.S.=Q$
  - $B\neq 0$ $\rightarrow$ equazione impossibile e $I.S.=\emptyset$

Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicate

23 $x+7=8$, N $\quad$ $4+x=2$, Z $\quad$ $x-3=4$, N $\quad$ $x=0$, N

24 $x+1=0$, Z $\quad$ $5x=0$, Z $\quad$ $\frac{x}{4}=0$, Q $\quad$ $-x=0$, Z

25 $7+x=0$, Z $\quad$ $-2x=0$, Z $\quad$ $-x-1=0$, Z $\quad$ $\frac{-x}{4}=0$, Q

26 $x-\frac{2}{3}=0$, Q $\quad$ $\frac{x}{-3}=0$, Z $\quad$ $2(x-1)=0$, Z $\quad$ $-3x=1$, Q

27 $3x=-1$, Q $\quad$ $\frac{x}{3}=1$, Q $\quad$ $\frac{x}{3}=2$, Q $\quad$ $\frac{x}{3}=-2$, Q

28 $0x=0$, Q $\quad$ $0x=5$, Q $\quad$ $0x=-5$, Q $\quad$ $\frac{x}{1}=0$, Q

29 $\frac{x}{1}=1$, Q $\quad$ $-x=10$, Z $\quad$ $\frac{x}{-1}=-1$, Z $\quad$ $3x=3$, N

Risolvi le seguenti equazioni

30 $3x=\frac{1}{3}$ $\quad$ $-3x=\frac{-1}{3}$ $\quad$ $x+2=0$

31 $4x-4=0$ $\quad$ $4x-0=1$ $\quad$ $2x+3=x+3$

32 $4x-4=1$ $\quad$ $4x-1=1$ $\quad$ $4x-1=0$

33 $3x=12-x$ $\quad$ $4x-8=3x$ $\quad$ $-x-2=-2x-3$

34 $-3(x-2)=3$ $\quad$ $x+2=2x+3$ $\quad$ $-x+2=2x+3$

35 $3(x-2)=0$ $\quad$ $3(x-2)=1$ $\quad$ $3(x-2)=3$

36 $0(x-2)=1$ $\quad$ $0(x-2)=0$ $\quad$ $12+x=-9x$

37 $40x+3=30x-100$ $\quad$ $4x+8x=12x-8$ $\quad$ $-2-3x=-2x-4$

38 $2x+2=2x+3$ $\quad$ $\frac{x+2}{2}=\frac{x+1}{2}$ $\quad$ $\frac{2x+1}{2}=x+1$

39 $\pi x=0$ $\quad 0{,}12x=0{,}1$ $\quad 2\pi x=\pi$

40 $892x-892=892x-892$ $\quad 892x-892=893x-892$ $\quad 348x-347=340x-347$

41 $340x+740=8942+340x$ $\quad 2x+3=2x+4$ $\quad 2x+3=2x+3$

42 $2(x+3)=2x+5$ $\quad 2(x+4)=2x+8$ $\quad 3x+6=6x+6$

43 $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}$

44 $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=3x-\frac{1}{2}$ $\quad -2x+3=-2x+4$ $\quad 1000x-100=2000x-200$

45 $\frac{x}{200}+\frac{1}{100}=\frac{1}{200}$ $\quad -2x-3=-2x-3$ $\quad 100x-1000=-1000x+100$

Riconosci tra le seguenti equazioni quelle determinate, quelle indeterminate e quelle impossibili.

46 $x+\frac{1}{2}=\frac{x+3}{3}-1$ $\quad \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x$

47 $\frac{3}{2}=2x-\left[\frac{x-1}{3}-\left(\frac{2x+1}{2}-5x\right)-\frac{2-x}{3}\right]$ $\quad \frac{x+5}{3}+3+\frac{2\cdot(x-1)}{3}=x+4$

48 Per una sola delle seguenti equazioni, definite in Z, l'insieme soluzione è vuoto. Per quale?

$[A]\ x=x+1$ $\quad [B]\ x+1=0$ $\quad [C]\ x-1=+1$ $\quad [D]\ x+1=1$

49 Una sola delle seguenti equazioni è di primo grado in una sola incognita (x). Quale?

$[A]\ x+y=5$ $\quad [B]\ x^2+1=45$ $\quad [C]\ x-\frac{7}{89}=+1$ $\quad [D]\ x+x^2=1$

50 Tra le seguenti una sola equazione non è equivalente alle altre. Quale?

$[A]\ \frac{1}{2}x\text{-}1=3x$ $\quad [B]\ 6x=x-2$ $\quad [C]\ x-2x=3x$ $\quad [D]\ 3x=\frac{1}{2}(x\text{-}2)$

51 Da $8x=2$ si ottiene: $[A]\ x=\text{-}6$ $\quad [B]\ x=4$ $\quad [C]\ x=\frac{1}{4}$ $\quad [D]\ x=-\frac{1}{4}$

52 Da $-9x=0$ si ottiene: $[A]\ x=9$ $\quad [B]\ x=-\frac{1}{9}$ $\quad [C]\ x=0$ $\quad [D]\ x=\frac{1}{9}$

53 L'insieme soluzione dell'equazione $2\cdot(x+1)=5\cdot(x-1)-11$ è:

$[A]\ I.S.=\{\text{-}6\}$ $\quad [B]\ I.S.=\{6\}$ $\quad [C]\ I.S.=\left\{\frac{11}{3}\right\}$ $\quad [D]\ I.S.=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Per ogni equazione, individua quali tra gli elementi dell'insieme indicato a fianco sono soluzioni:

54 $\frac{x+5}{2}+\frac{1}{5}=0$ $\quad Q=\{1,-5,7,-\frac{27}{5}\}$

55 $x-\frac{3}{4}x=4$ $\quad Q=\{1,-1,0,16\}$

56 $x(x+1)+4=5-2x+x^2$ $\quad Q=\left\{-9,3,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right\}$

Risolvi le seguenti equazioni

57 $x-5(1-x)=5+5x$ **R.** $[10]$

58 $2(x-5)-(1-x)=3x$

59 $3(2+x)=5(1+x)-3(2-x)$ R. $\left[\frac{7}{5}\right]$

60 $4(x-2)-3(x+2)=2(x-1)$

61 $\frac{x+1000}{3}+\frac{x+1000}{4}=1$ R. $\left[\frac{-6988}{7}\right]$

62 $\frac{x-4}{5}=\frac{2x+1}{3}$ R. $\left[-\frac{17}{7}\right]$

63 $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{5}=\frac{1}{10}$

64 $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{x}{6}$ R. [2]

65 $537x+537\frac{x}{4}-\frac{537x}{7}=0$ R. $[0]$

66 $\frac{2x+3}{5}=x-1$ R. $\left[\frac{8}{3}\right]$

67 $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}-1=\frac{x}{3}$ impossibile

68 $\frac{4-x}{5}+\frac{3-4x}{2}=3$ R. $\left[-\frac{7}{22}\right]$

69 $\frac{x+3}{2}=3x-2$

70 $\frac{x+0{,}25}{5}=1{,}75-0{,}\overline{3}x$ R. $\left[\frac{51}{16}\right]$

71 $3(x-2)-4(5-x)=3x\left(1-\frac{1}{3}\right)$

72 $4(2x-1)+5=1-2(-3x-6)$ R. [6]

73 $\frac{3}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(1-x)=x+2$ **R.[1]**

74 $\frac{1}{2}(x+5)-x=\frac{1}{2}(3-x)$ impossibile

75 $x^2-2(x-3)=3(x^2-x)=3(x^2-x)+x-1$

76 $(x+3)^2=(x-2)(x+2)+\frac{1}{3}x$ R. $\left[-\frac{39}{17}\right]$

77 $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2}=\frac{(x-1)^2}{4}$ R. [-2]

78 $2\left(x-\frac{1}{3}\right)+x=3x-2$ impossibile

79 $\frac{3}{2}x+\frac{x}{4}=5\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)-x$ R. $\left[\frac{30}{7}\right]$

80 $(2x-3)(5+x)+\frac{1}{4}=2(x-1)^2-\frac{1}{2}$ R. $\left[\frac{65}{44}\right]$

81 $(x-2)(x+5)+\frac{1}{4}=x^2-\frac{1}{2}$ R. $\left[\frac{37}{12}\right]$

82 $4(x+1)-3x(1-x)=(x+1)(x-1)+4+2x^2$ R. [-1]

83 $(x+1)^2=(x-1)^2$

84 $\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{x^2-1}{2}=1$ R. [0]

85 $\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{1}{3}(x^2-1)$ R. [-1]

86 $\frac{1-x}{3}\cdot(x+1)=1-x^2+\frac{2}{3}(x^2-1)$ R. [1]

87 $(x+1)^2=x^2-1$ R. [-1]

88 $(x+1)^3=(x+2)^3-3x(x+3)$ impossibile

89 $\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}x-1\right)+\frac{5}{3}x\left(1+\frac{1}{3}x\right)=\frac{2}{3}x(x+3)$ R. [0]

90 $\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{3}\right)-(1-x)+2\left(\frac{1}{3}x-1\right)=\frac{-3}{2}x+1$

91 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x+\frac{1}{2}$

92 $3+2x-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}x+\frac{x+3}{2}$ R. [4]

93 $\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{x+1}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\left(x+\frac{2-x}{3}\right)$ R. $\left[-\frac{5}{2}\right]$

94 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=(x+1)(3x-1)-5x-\frac{1}{2}$ R. $\left[-\frac{9}{8}\right]$

95 $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{x+1}{5}-\frac{3}{5}=\frac{x-1}{5}+\frac{7}{15}x$

96 $\frac{1}{2}(x-2)-\left(\frac{x+1}{2}-\frac{1+x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2-x}{6}+\frac{1+x}{3}$ impossibile

97 $-\left(\frac{1}{2}x+3\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{4}(4x+1)=\frac{1}{2}(x-1)$ R. [2]

98 $\frac{(x+1)(x-1)}{9}-\frac{3x-3}{6}=\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{2-2x}{6}$ R. [1]

99 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-x(x+1)(x-1)=\frac{-5}{2}x(x+1)$ R. $\left[\frac{3}{20}\right]$

100 $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2=\frac{2}{3}x$ R. [5]

2. PROBLEMI DI PRIMO GRADO IN UNA INCOGNITA

►1. Un po' di storia e qualche aneddoto

Sin dall'antichità l'uomo si è trovato di fronte a difficoltà pratiche, legate alla vita quotidiana e ha perciò messo a punto strategie per superarle.
Sembra che nell'antico Egitto le periodiche piene del Nilo abbiano spinto l'uomo a sviluppare la capacità di tracciare rette parallele, rette perpendicolari, di misurare il perimetro e l'area di particolari figure geometriche o viceversa di calcolare le misure dei lati di poligoni di dato perimetro o data area per poter ridefinire i confini degli appezzamenti di terreno.
Il *papiro di Rhind*, (dal nome dell'inglese A. H. Rhind che lo comprò a Luxor nel 1858), testo egizio scritto in ieratico, risalente al 1700 a.C., si autodefinisce "istruzioni per conoscere tutte le cose oscure" contiene più di 85 problemi con relativi metodi di soluzione riguardanti il calcolo della capacità di recipienti e di magazzini, la ricerca dell'area di appezzamenti di terreno e altre questioni aritmetiche.
Nel problema 24 del papiro, ad esempio, viene calcolato il mucchio quando esso ed il suo settimo sono uguali a 19.

Mucchio è l'incognita del problema, indicata con il termine *aha* il cui segno è  .
Noi traduciamo la richiesta nell'equazione $x+\frac{1}{7}x=19$

Nel 1202 Leonardo Pisano, conosciuto col nome paterno di "filius Bonacci" o Fibonacci, pubblicò il *Liber Abaci* in cui, a partire dall'ottavo capitolo, presenta vari metodi algebrici per la risoluzione di problemi di matematica applicata, legati alla realtà dell'epoca, in particolare all'ambiente commerciale. I nuovi \`algoritmi\` presentati da Fibonacci, intendevano facilitare la risoluzione dei problemi di calcolo evitando l'utilizzo dell'abaco.

> Nel 1223 a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia, assistette a un singolare torneo tra matematici dell'epoca; il problema proposto era il seguente:
> "Quante coppie di conigli si ottengono in un anno (salvo i casi di morte) supponendo che ogni coppia dia alla luce un'altra coppia ogni mese e che le coppie più giovani siano in grado di riprodursi già al secondo mese di vita?".

Fibonacci vinse la gara dando al quesito una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato. La soluzione fu trovata tramite l'individuazione di una particolare successione di numeri, nota come successione di Fibonacci.
Secondo la leggenda, il grande matematico Carl Fiedrich Gauss già all'età di tre anni avrebbe corretto un errore di suo padre nel calcolo delle sue finanze. All'età di 10 anni fu autorizzato a seguire le lezioni di aritmetica di un certo Buttner. Un giorno, agli studenti particolarmente turbolenti, Buttner diede come compito di punizione il calcolo della somma dei primi 100 numeri, da 1 a 100. Poco dopo, sorprendendo tutti, il giovanissimo Carl diede la risposta esatta, "5050" . Si era accorto che mettendo in riga tutti i numeri da 1 a 100 e nella riga sottostante i numeri da 100 a 1, ogni colonna dava come somma 101; fece dunque il prodotto 100x101 e divise per 2, ottenendo facilmente il risultato: Buttner rimase sgomento ... Non abbiamo notizie certe, ma sembra che le cose siano andate così.

►2. Risoluzione dei problemi

La risoluzione dei problemi …… serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose. (R. Descartes)

I problemi che possono presentarsi nel corso degli studi o nell'attività lavorativa sono di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale, possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel testo del problema.
Analizzeremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di primo grado in una sola incognita. Prima di buttarci alla risoluzione del problema, procediamo a:

- una lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita e la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, ragionando sull'obiettivo del problema (condizioni sull'incognita);

- la traduzione in “forma matematica” delle relazioni che intercorrono tra i dati e l’obiettivo, cioè l’individuazione dell’equazione risolvente;
- proseguiamo ora con la risoluzione dell’equazione trovata;
- infine effettuiamo un confronto tra la soluzione trovata e le condizioni poste su di essa.

Problema 1

Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

La situazione può essere materialmente descritta con una figura. Togliamo da ogni piatto della bilancia mezzo mattone, la bilancia è ancora in equilibrio come mostra la figura 2, da ciò possiamo dedurre che mezzo mattone pesa un chilo. Il mattone intero pesa dunque due chili.
Risolviamo ora il problema seguendo la procedura sopra suggerita:

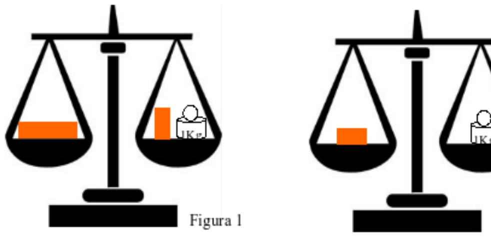


Figura 1 Figura 2

dati	obiettivo
peso di un mattone = peso di mezzo mattone + 1kg	peso del mattone

Procedura risolutiva:
Come incognita del problema possiamo scegliere il peso del mattone: la indichiamo con p.
Il valore di p dovrà essere un numero positivo.
L’equazione risolvente è la traduzione con formalismo matematico dell’unica relazione contenuta nel testo del problema: $p=\frac{1}{2}p+1$.

Risolviamo l’equazione: $p-\frac{1}{2}p=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}p=1 \quad \rightarrow \quad p=2(Kg)$

La soluzione ottenuta è accettabile; il problema è determinato.

Problema 2

Aggiungendo ad un numero naturale i suoi tre quarti, si ottiene il suo doppio aumentato di 10. Qual è il numero?

L’ambiente del problema è numerico: si cerca un numero naturale. Indichiamo con *n* l’incognita cerchiamo quindi $n\in\mathbb{N}$. La lettura attenta del testo mette in luce le operazioni che dobbiamo eseguire sull’incognita e che traduciamo nei dati:

dati	obiettivo
$n+\frac{3}{4}n=2n+10$	$n\in\mathbb{N}$

Procedura risolutiva
L’equazione risolvente è già indicata nei dati $n+\frac{3}{4}n=2n+10$.

Per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per 4, otteniamo:
$4n+3n-8n=40 \quad \rightarrow \quad -n=40 \quad \rightarrow \quad n=-40$

La soluzione nonè accettabile per le condizioni poste; il problema non ha soluzione.

Problema 3

Il I° gennaio 1990 Chiara aveva il doppio dell’età di Aldo; il 1° gennaio 2000 Chiara aveva vent’anni più di Aldo. Quale sarà l’età di Chiara il I° gennaio 2010?

Leggendo attentamente il problema notiamo che le incognite sono due: l’età di Chiara e l’età di Aldo. Indichiamo perciò con ***a*** l’età di Chiara al 1990 e con ***p*** quella di Aldo.
Nel 2000 la loro età sarà aumentata di 10 anni. Naturalmente la soluzione del problema sarà nell’insieme dei numeri naturali. Scriviamo dati e obiettivo usando il formalismo matematico:

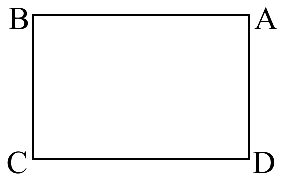
dati	obiettivo
nel 1990: $a=2p$	? età Chiara nel 2010
nel 2000: $a+10=(p+10)+20$	

Procedura risolutiva
Osserviamo che una volta determinata l'età di Chiara nel 1990, basterà aggiungere a questa 20 per ottenere la soluzione, pertanto l'età di Chiara nel 2010 è a+20.
Trasformiamo la seconda relazione riportata nei dati sostituendo l'informazione relativa al 1990, si ottiene $2p+10=p+10+20 \quad \rightarrow \quad 2p-p=20 \quad \rightarrow \quad p=20$
L'età di Aldo nel 1990 era 20, quindi a=40.
Infine, l'età di Chiara nel 2010 è 40+20=60.
La soluzione accettabile; il problema è determinato.

Problema 4

Calcolare l'area di un rettangolo in cui l'altezza supera di 8m $\frac{1}{3}$ *della base e il perimetro è* $\frac{20}{7}$ *della base stessa.*

Il problema è di tipo geometrico e riguarda un rettangolo. Facendo riferimento alla figura abbiamo:



dati	obiettivo
$AD=\frac{1}{3}AB+8$	? Area (ABCD)
$2p=\frac{20}{7}AB$	

Procedura risolutiva:

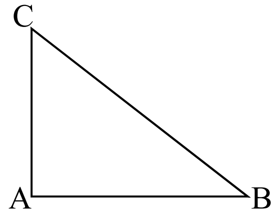
$\text{Area (ABCD)}=\text{misura base}\cdot\text{misura altezza}=\overline{AB}\cdot\overline{AD}$
Dobbiamo dunque determinare queste due misure. I dati del problema indicano che la misura dell'altezza dipende da quella della base; una volta trovata questa misura basta farne un terzo e aggiungere 8 per avere quella dell'altezza; questo ragionamento ci fa scegliere come incognita $\overline{AB}=x$ con x numero reale positivo.
Traduciamo con formalismo matematico la prima e la seconda relazione contenuta nei dati:
$\overline{AD}=\frac{1}{3}x+8;\quad 2p=\frac{20}{7}x$; sappiamo che il perimetro di un rettangolo è il doppio della somma della base con l'altezza. Riscriviamo con linguaggio matematico anche questa relazione:
$2\cdot\left(x+\frac{1}{3}x+8\right)=\frac{20}{7}x$ che risulta l'equazione risolvente.
Svolgiamo i calcoli e otteniamo $4x=21\cdot16 \quad \rightarrow \quad x=84 \quad \rightarrow \quad \overline{AB}=84 \quad e \text{ quindi } \quad \overline{AD}=36$.
Avendo ottenuto le misure della base e dell'altezza possiamo ora calcolare l'area:
$Area(ABCD)=36\cdot84=3024(\text{rispetto al } m^2)$.

Problema 5

In un triangolo rettangolo il perimetro è 120cm. e un cateto è $\frac{3}{5}$ *dell'ipotenusa. Determinare l'area del triangolo.*

Il problema è di tipo geometrico e riguarda un triangolo rettangolo. Rappresentiamo il triangolo:

dati	obiettivo
$C\hat{A}B = \text{angolo retto}$	
$2p = 120$	?Area (ABC)
$AC = \frac{3}{5} CB$	



Procedura risolutiva:

Area (ABC) = $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

Per calcolare l'area, occorre determinare la misura dei cateti del triangolo rettangolo; i dati del problema ci danno una relazione tra la misura di un cateto e la misura dell'ipotenusa; conosciamo anche il perimetro del triangolo.

Scegliamo come incognita la misura in cm di CB, cioè $\overline{CB} = x$ con $x \in \mathbb{R}^+$.

Formalizziamo i dati: $\overline{CB} = x$; $\overline{AC} = \frac{3}{5}x$; $\overline{AB} + x + \frac{3}{5}x = 120$ (*)

Per poter scrivere una equazione che ci permetta di determinare il valore dell'incognita ci manca la misura di AB. Sembra che il problema sia privo di una informazione. Tuttavia, il triangolo dato è rettangolo quindi tra i suoi lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora: $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Pertanto possiamo determinare la misura di AB: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}x^2} = \frac{4}{5}x$

Con questo dato riscriviamo la (*) che risulta essere l'equazione risolvente del problema

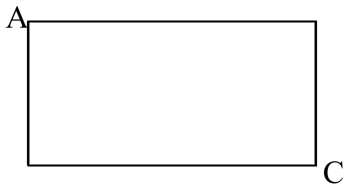
$\frac{4}{5}x + x + \frac{3}{5}x = 120 \quad \rightarrow \quad 12x = 120\cdot 5 \quad \rightarrow \quad x = 50 \quad \rightarrow \quad \overline{CB} = 50$

Quindi $\overline{AC} = 30\text{cm}$ *e* $\overline{AB} = 40\text{cm}$, l'area: $Area(ABC) = \frac{30\cdot 40}{2} = 600\text{cm}^2$.

101 In un rettangolo ABCD si sa che $\overline{AB} = 91\text{m}$ *e* $\overline{BC} = 27\text{m}$; dal punto E del lato AB, traccia la perpendicolare a DC e indica con F il punto d'intersezione con lo stesso lato. Determina la misura di AE, sapendo che $\text{Area}(AEFD) = \frac{3}{4}\text{Area}(EFCB)$.

Il problema è di tipo geometrico e riguarda un rettangolo. Completa la figura, i dati e l'obiettivo:

Dati $\overline{AB} = \ldots\ \ldots$ $\quad \overline{BC} = 27 \quad EF \in \ldots\ \ldots EF \perp \ldots\ \ldots$



Obiettivo … … …

(*) Area ……… = ………… Area ………

Poni $\overline{AE} = x$ Stabilisci le condizioni sull'incognita 0 < x < ……….

Determina in funzione di x l'area delle due parti in cui resta diviso da EF il rettangolo assegnato:

Area (AEFD) = ………   Area(EFCB) = …………

Scrivi la (*) in funzione di x ……………………………… Risolvi l'equazione ……………………..

Confronta con le condizioni ………………………

102 Luca e Andrea posseggono rispettivamente 200 euro e 180 euro; Luca spende 10 euro al giorno e Andrea 8 euro. Dopo quanti giorni avranno la stessa somma? [10]

103 Determina due numeri, sapendo che la loro somma vale 70 e il secondo supera di 16 il doppio del primo. [18, 52]

104 Calcola due numeri, sapendo che il secondo *supera* di 17 il *triplo* del primo e che la loro somma è 101. [21, 80]

105 Determinare due numeri dispari consecutivi sapendo che il minore supera di 10 i $\frac{3}{7}$ del maggiore. [19, 21]

106 Sommando 15 al doppio di un numero si ottengono i $\frac{7}{2}$ del numero stesso. Qual è il numero? [10]

107 Determinare due numeri consecutivi sapendo che i $\frac{4}{9}$ del maggiore superano di 8 i $\frac{2}{13}$ del minore.

108 Se ad un numero sommiamo il suo doppio, il suo triplo, il suo quintuplo e sottraiamo 21 otteniamo 100. Qual è il numero? [11]

109 Trova il prodotto tra due numeri, sapendo che: se al primo numero sottraiamo 50 otteniamo 50 meno il primo numero; se al doppio del secondo aggiungiamo il suo consecutivo, otteniamo 151; [2500]

110 Se a 1/25 sottraiamo un numero, otteniamo la quinta parte del numero stesso. Qual è questo numero? [1/30]

111 Carlo ha 152 caramelle e vuole dividerle con le sue due sorelline. Quante caramelle resteranno a Carlo se le ha distribuite in modo che ogni sorellina ne abbia la metà delle sue? [76]

112 Se a $\frac{5}{2}$ sottraiamo un numero, otteniamo il numero stesso aumentato di $\frac{2}{3}$. Di quale numero si tratta? [11/12]

113 Se ad un numero sottraiamo 34 e sommiamo 75, otteniamo 200. Qual è il numero? [159]

114 Se alla terza parte di un numero sommiamo 45 e poi sottraiamo 15 otteniamo 45. Qual è il numero? [45]

115 Se ad un numero sommiamo il doppio del suo consecutivo otteniamo 77. Qual è il numero? [25]

116 Se alla terza parte di un numero sommiamo la sua metà otteniamo il numero aumentato di 2. Qual è il numero? [-12]

117 Il doppio di un numero equivale alla metà del suo consecutivo più 1. Qual è il numero? [1]

118 Un numero è uguale al suo consecutivo meno 1. Trova il numero. [ind.]

119 La somma tra un numero e il suo consecutivo è uguale al numero aumentato di 2. Trova il numero.[1]

120 La somma tra un numero ed il suo consecutivo aumentato di 1 è uguale a 18. Qual è il numero? [8]

121 La somma tra un numero e lo stesso numero aumentato di 3 è uguale a 17. Qual è il numero?

122 La terza parte di un numero aumentata di 3 è uguale a 27. Trova il numero. [72]

123 La somma tra due numeri X e Y vale 80. Del numero X sappiamo che questo stesso numero aumentato della sua metà è uguale a 108. [72, 8]

124 Sappiamo che la somma fra tre numeri (X,Y,Z) è uguale a 180. Il numero X è uguale a se stesso diminuito di 50 e poi moltiplicato per 6. Il numero Y aumentato di 60 è uguale a se stesso diminuito di 40 e poi moltiplicato per 6, trova X,Y,Z. [60,60,60]

125 La somma tra la terza parte di un numero e la sua quarta parte è uguale alla metà del numero aumentata di 1. Trova il numero. [12]

126 Determina due numeri interi consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 49. [24; 25]

127 Trova tre numeri dispari consecutivi tali che la loro somma sia uguale a 87.

128 Trova cinque numeri pari consecutivi tali che la loro somma sia uguale a 1000.

129 Trova due numeri dispari consecutivi tali che la differenza dei loro cubi sia uguale a 218. [5; 7]

130 Trova un numero tale che se calcoliamo la differenza tra il quadrato del numero stesso e il quadrato del precedente otteniamo 111. [56]

131 Qual è il numero che sommato alla sua metà è uguale a 27?

132 Moltiplicando un numero per 9 e sommando il risultato per la quarta parte del numero si ottiene 74. Qual è il numero? [8]

133 La somma di due numeri pari consecutivi è 46, trova i due numeri.

134 La somma della metà di un numero con la sua quarta parte è uguale al numero stesso diminuito della sua quarta parte. Qual è il numero? [indeterminato]

135 Di Y sappiamo che il suo triplo è uguale al suo quadruplo diminuito di due, trova Y. [2]

136 Il numero Z aumentato di 60 è uguale a se stesso diminuito di 30 e moltiplicato per 4.

137 Ad un certo punto del campionato la Fiorentina ha il doppio dei punti della Juventus e l'Inter ha due terzi dei punti della Fiorentina. Sapendo che in totale i punti delle tre squadre sono 78, determinare i punti delle singole squadre. [36, 24, 18]

138 Per organizzare una gita collettiva, vengono affittati due pulmini dello stesso modello, per i quali ciascun partecipante deve pagare 12 euro. Sui pulmini restano, in tutto, quattro posti liberi. Se fossero stati occupati anche questi posti, ogni partecipante avrebbe risparmiato 1,50 euro. Quanti posti vi sono su ogni pulmino? (“La Settimana enigmistica”). [16]

139 Un rubinetto, se aperto, riempie una vasca in 5 ore; un altro rubinetto riempie la stessa vasca in 7 ore. Se vengono aperti contemporaneamente, quanto tempo ci vorrà per riempire un sesto della vasca?

140 Policrate, tiranno di Samos, domanda a Pitagora il numero dei suoi allievi. Pitagora risponde che: ``la metà studia le belle scienze matematiche; l'eterna Natura è l'oggetto dei lavori di un quarto; un settimo si esercita al silenzio e alla meditazione; vi sono inoltre tre donne." Quanti allievi aveva Pitagora? (Preso dal libro "Matematica dilettevole e curiosa")

141 Trovare un numero di due cifre sapendo che la cifra delle decine è inferiore di 3 rispetto alla cifra delle unità e sapendo che invertendo l'ordine delle cifre e si sottrae il numero stesso, si ottiene 27. ("Algebra ricreativa")

142 Al cinema ``Matematico" hanno deciso di aumentare il biglietto del 10%; il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. E' stato un affare?

143 A mezzogiorno le lancette dei minuti e delle ore sono sovrapposte. Quando saranno di nuovo sovrapposte?

144 Con due qualità di caffè da 3 euro/kg e 5 euro/kg si vuole ottenere un quintale di miscela da 3,25 euro/kg. Quanti kg della prima e quanti della seconda qualità occorre prendere?

145 Ubaldo, per recarsi in palestra, passa sui mezzi di trasporto 20 minuti, tuttavia il tempo totale per completare il tragitto è maggiore a causa dei tempi di attesa. Sappiamo che Ubaldo utilizza 3 mezzi, impiega i $\frac{3}{10}$ del tempo totale per l'autobus, i $\frac{3}{5}$ del tempo totale per la metropolitana e 10 minuti per il treno. Quanti minuti è costretto ad aspettare i mezzi di trasporto? [*Poni x il tempo di attesa*, R. 80']

146 In una partita a dama dopo i primi 10 minuti sulla scacchiera restano ancora 18 pedine. Dopo altri 10 minuti un giocatore perde 4 pedine nere e l'altro 6 pedine bianche ed entrambi rimangono con lo stesso numero di pedine. Calcolate quante pedine aveva ogni giocatore dopo i primi 10 minuti di gioco.

147 Due numeri naturali sono tali che la loro somma è 16 e il primo, aumentato di 1, è il doppio del secondo diminuito di 3. Trovare i due numeri. [*Impossibile*]

148 Un dvd recorder ha due modalità di registrazione: SP e LP. Con la seconda modalità è possibile registrare il doppio rispetto alla modalità SP. Con un dvd dato per 2 ore in SP, come è possibile registrare un film della durata di 3 ore e un quarto? Se voglio registrare il più possibile in SP (di qualità migliore rispetto all'altra) quando devo necessariamente passare all'altra modalità LP?

149 Tizio si reca al casinò e gioca tutti i soldi che ha; dopo la prima giocata, perde la metà dei suoi soldi. Gli vengono prestati 2 euro e gioca ancora una volta tutti i suoi soldi; questa volta vince e i suoi averi vengono quadruplicati. Torna a casa con 100 euro. Con quanti soldi era arrivato al casinò? [46€]

150 I sette nani mangiano in tutto 127 bignè; sapendo che il secondo ne ha mangiati il doppio del primo, il terzo il doppio del secondo e così via. quanti bignè ha mangiato ciascuno di loro? [1, 2, 4, 8, 16...]

151 Babbo Natale vuole mettere in fila le sue renne in modo tale che ogni fila abbia lo stesso numero di renne. Se le mette in fila per quattro le file sono due di meno rispetto al caso in cui le mette in fila per tre. Quante sono le renne? [24]

152 Cinque fratelli si devono spartire un'eredità di 180000 euro in modo tale che ciascuno ottenga 8000 euro in più del fratello immediatamente minore. Quanto otterrà il fratello più piccolo? [20.000]

153 Giovanni ha tre anni in più di Maria. Sette anni fa la somma delle loro età era 19. Quale età hanno attualmente? [15, 18]

154 Francesca ha il triplo dell'età di Anna. Fra sette anni Francesca avrà il doppio dell'età di Anna. Quali sono le loro età attualmente. [7, 21]

155 In una fattoria ci sono tra polli e conigli 40 animali con 126 zampe. Quanti sono i conigli?
[17 polli, 23 conigli]

156 Due anni fa ho comprato un appartamento. Ho pagato alla consegna 1/3 del suo prezzo. Dopo un anno ¾ della rimanenza, oggi ho saldato il debito sborsando 40.500 €. Quale è stato il prezzo dell'appartamento? [243.000 €]

157 Un ciclista pedala in una direzione a 30 km/h, un marciatore parte a piedi dallo stesso punto e alla stessa ora e va nella direzione contraria a 6 km/h. Dopo quanto tempo saranno lontani 150 km? [250']

158 Una banca mi offre il 2% di interesse su quanto depositato all'inizio dell'anno. Alla fine dell'anno vado a ritirare i soldi depositati più l'interesse: se ritiro € 20.400 quanto avevo depositato all'inizio? Quanto dovrebbe essere la percentuale di interesse per ricevere € 21.000 depositando i soldi calcolati al punto precedente? [€ 20.000; 5%]

159 Un treno parte da una stazione e viaggia alla velocità costante di 120km/h. Dopo 80 minuti parte un secondo treno dalla stessa stazione e nella stessa direzione alla velocità di 150km/h. Dopo quanti km il secondo raggiungerà il primo? [800 km]

160 In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è 3/7 dell'altro angolo acuto. Quanto misurano gli angoli del triangolo? [63°, 27°, 90°]

161 In un triangolo un angolo è i 3 / 4 del secondo angolo, il terzo angolo supera di 10° la somma degli altri due. Quanto misurano gli angoli?
[36°,43; 48°,57; 95°]

162 Un triangolo isoscele ha il perimetro di 122m, la base di 24m. Quanto misura ciascuno dei due lati obliqui congruenti? [49m]

163 Un triangolo isoscele ha il perimetro di 188cm, la somma dei due lati obliqui supera di 25cm i 2/3 della base. Calcola la lunghezza dei lati. [97,8cm; 45,1cm; 45,1cm]

164 In un triangolo ABC di perimetro 186cm il lato AB è 5/7 di BC e BC è 3/7 di AC. Quanto misurano i lati del triangolo? [32,82cm; 45,95cm; 107,22cm]

165 Un trapezio rettangolo ha la base minore che è 2/5 della base maggiore, l'altezza è 5/4 della base minore. Sapendo che il perimetro è 294,91m, calcola l'area del trapezio. [4235cm^2]

166 Un trapezio isoscele ha la base minore pari a 7/13 della base maggiore, il lato obliquo è pari ai 5/6 della differenza tra le due basi. Sapendo che il perimetro misura 124cm, calcola l'area del trapezio. [683,38cm^2]

167 Il rettangolo ABCD ha il perimetro di 78cm, inoltre sussiste la seguente relazione tra i lati: $\bar{AD}=\frac{8}{5}\bar{AB}+12\text{cm}$. Calcola l'area del rettangolo. [297,16cm^2]

168 Un rettangolo ha il perimetro che misura 240cm, la base è tripla dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. [2700 cm^2]

169 In un rettangolo l'altezza supera di 3cm i 3/4 della base, inoltre i 3/2 della base hanno la stessa misura dei 2/3 dell'altezza. Calcola le misura della base e dell'altezza. [2; 9/2]

170 In un triangolo isoscele la base è gli 8/5 del lato ed il perimetro misura cm 108. Trovare l’area del triangolo e la misura dell’altezza relativa ad uno dei due lati obliqui. [432cm^2; 28,8cm]

171 In un rombo la differenza tra le diagonali è di cm.3. Sapendo che la diagonale maggiore è 4/3 della minore, calcolare il perimetro del rombo. [30cm]

172 Determinare le misure delle dimensioni di un rettangolo, sapendo che la minore è uguale ad 1/3 della maggiore e che la differenza tra il doppio della minore e la metà della maggiore è di cm.10. Calcolare inoltre il lato del quadrato avente la stessa area del rettangolo dato.

$$[60\text{cm}\,,20\text{cm}\,,20\sqrt{3}\,cm]$$

173 In un trapezio rettangolo il lato obliquo e la base minore hanno la stessa lunghezza. La base maggiore supera di 7 cm i 4/3 della base minore. Calcolare l’area del trapezio sapendo che la somma delle basi è 42 cm. [189cm^2]

174 L’area di un trapezio isoscele è 168cm^2, l’altezza è 8 cm, la base minore è 5/9 della maggiore. Calcolare le misure delle basi, del perimetro del trapezio e delle sue diagonali. [27cm; 15cm; 62cm; 22,47cm]

175 Le due dimensioni di un rettangolo differiscono di cm 4. Trovare la loro misura sapendo che aumentandole entrambe di cm 3 l’area del rettangolo aumenta di cm^2 69. [12cm; 8cm]

176 In un quadrato ABCD il lato misura 12 cm. Detto M il punto medio del lato AB, determinare sul lato opposto CD un punto N tale che l’area del trapezio AMND sia metà di quella del trapezio MBCN. [DN=2cm]

177 Nel rombo ABCD la somma delle diagonali è 20 cm. ed il loro rapporto è 2/3. Determinare sulla diagonale maggiore AC un punto P tale che l’area del triangolo APD sia metà di quella del triangolo ABD.

$$\left[\overline{AP}=\frac{\overline{AC}}{2}=6\text{cm}\right]$$

3. Le equazioni con il software Derive

Il comando implementato in Derive per la risoluzione di equazioni è SOLVE. Esso deve essere accompagnato dall'equazione da risolvere e dalla variabile rispetto alla quale questa deve essere risolta, cioè se si vuole risolvere l'equazione: $x + 3 = 2x - 5$

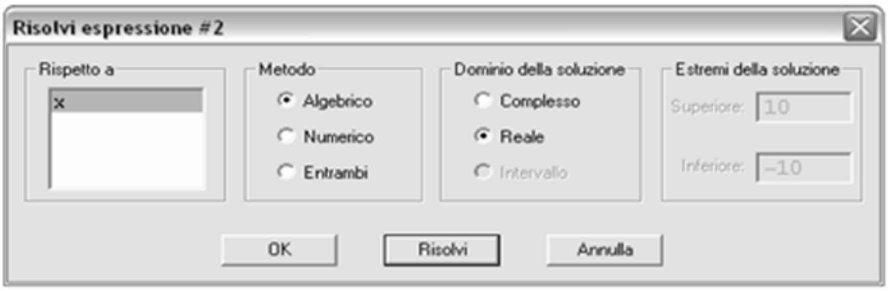
bisogna inserire il comando: `#1:   SOLVE(x + 3 = 2·x − 5, x)`

Fatto ciò basta cliccare sull'icona = per visualizzare la soluzione dell'equazione.

```
#1:   SOLVE(x + 3 = 2·x − 5, x)

#2:                                    x = 8
```

Questo comando permette di vedere come, cambiando l'insieme d'appartenenza dell'incognita, l'equazione può ammettere o no soluzioni. Infatti, l'equazione $x^2+1=0$ non ammette soluzioni nell'insieme dei numeri reali

```
#2:   SOLVE(x^2 + 1 = 0, x)
```




```
#2:   SOLVE(x^2 + 1 = 0, x, Real)

#3:                                         false
```

Inoltre è possibile notare come il comando SOLVE tratta i casi in cui l'equazione si presenta possibile, impossibile o indeterminata. Infatti, se si chiede di risolvere un'equazione indeterminata, si ottiene in uscita il valore di verità *true*, che sta ad indicare il fatto che l'uguaglianza è vera per qualsiasi valore dell'incognita.

```
#1:   SOLVE(4·x = 3·x + x, x)

#2:                                    true
```

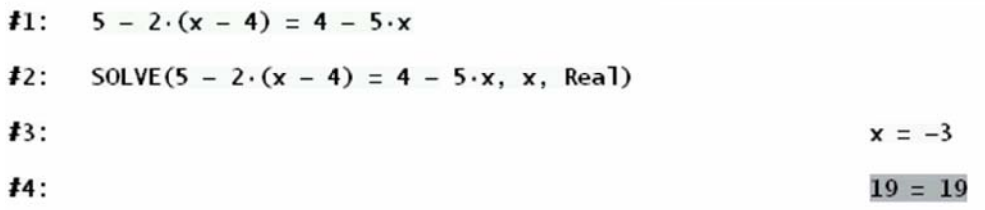
Se si chiede di risolvere un'equazione impossibile, la risposta del software sarà *false* e sta ad indicare che l'uguaglianza non si realizza per nessun valore dell'incognita.

```
#1:   SOLVE(4·x + 4 + x − 3 = 5·x − 3, x)

#2:                                        false
```

In entrambi i casi è possibile rendersi conto del risultato semplificando le espressioni mediante il comando BASE del menu SEMPLIFICA.

```
#1:   4·x = 3·x + x

#2:                                   4·x = 4·x

                               equazione indeterminata

#3:   4·x + 4 + x − 3 = 5·x − 3

#4:                               5·x + 1 = 5·x − 3

                               equazione impossibile
```

E' inoltre possibile risolvere le equazioni e verificare che quelli ottenuti sono proprio i valori dell'incognita che realizzano l'uguaglianza, sfruttando il comando SOSTITUISCI VARIABILI del menu SEMPLIFICA.



Scheda da lavoro

Esempi

Risolvi e verifica le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$(x-2)(x-3)-6=(x+2)^2+5$$

$$(x-3)(x-4)-\frac{1}{3}(1-3x)(2-x)=\frac{1}{3}x-5\left(\frac{2x-9}{6}\right).$$

Indicazioni operative

1. Inserisci la prima espressione nel campo in basso
2. Clicca su INVIO
3. Dal menu Semplifica scegli il comando Sviluppa e seleziona la casella Quadrati
4. Clicca su Sviluppa
5. Dal menu Risolvi scegli il comando Espressione, seleziona la variabile x e clicca su Risolvi
6. Clicca sulla riga #1 e, dal menu Semplifica, scegli Sostituzione variabili
7. Inserisci il valore
8. Clicca su Semplifica
9. Otterrai in questo modo la seguente schermata nella quale comparirà l'uguaglianza.

#1: $(x-2)\cdot(x+3)-6=(x+2)^2+5$

#2: $x=4\cdot x+21$

#3: SOLVE$(x=4\cdot x+21,\ x,\ \text{Real})$

#4: $x=-7$

#5: $30=30$

Esegui gli stessi passaggi per risolvere la seconda equazione e alla fine otterrai la schermata seguente.

#1: $(x-3)\cdot(x-4)-\dfrac{1}{3}\cdot(1-3\cdot x)\cdot(2-x)=\dfrac{1}{3}\cdot x-5\cdot\dfrac{2\cdot x-9}{6}$

#2: $x=\dfrac{2\cdot x}{7}+\dfrac{23}{28}$

#3: SOLVE$\left(x=\dfrac{2\cdot x}{7}+\dfrac{23}{28},\ x,\ \text{Real}\right)$

#4: $x=\dfrac{23}{20}$

#5: $\left(\dfrac{23}{20}-3\right)\cdot\left(\dfrac{23}{20}-4\right)-\dfrac{1}{3}\cdot\left(1-3\cdot\dfrac{23}{20}\right)\cdot\left(2-\dfrac{23}{20}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{23}{20}-5\cdot\dfrac{2\cdot\dfrac{23}{20}-9}{6}$

#6: $\dfrac{179}{30}=\dfrac{179}{30}$

Risolvi con il software Derive le seguenti equazioni numeriche

178 $\dfrac{2w-1}{3}+\dfrac{w-5}{4}=\dfrac{w+1}{3}-4$ $\left[R.\ -\dfrac{25}{7}\right]$

$\dfrac{2w-1}{3}+\dfrac{w-5}{4}=\dfrac{w+1}{3}-4$ $\left[R.\ -\dfrac{25}{7}\right]$

179 $\dfrac{2x-3y+1}{2}+\dfrac{x-2y-2}{3}=\dfrac{x+y+3}{4}$ $\left[R.\ x=\dfrac{29y+11}{13};\ y=\dfrac{13x-11}{29}\right]$

180 $(2x-5)^2+2(x-3)=(4x-2)(x+3)-28x+25$ $[R.\ true]$

Autori

Cristina Mocchetti: teoria
Claudio Carboncini: integrazioni
Germano Pettarin: esercizi
Francesco Daddi: esercizi, correzioni
Luciano Sarra: correzioni
Luca Tedesco: esercizi
Vittorio Patriarca: integrazioni
Erasmo Modica: integrazioni, par. 4 Derive
Gemma Fiorito: integrazioni, esercizi
Nicola De Rosa: risultati
Antonio Bernardo: coordinamento

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3, o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 1.2 del 28.06.2010