MATEMATICA C^3

ALGEBRA 1

2 INSIEMI

Stonehenge by radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

1. GENERALITÀ SUGLI INSIEMI

►1. Insiemi ed elementi

In matematica usiamo la parola **insieme** per indicare un raggruppamento, una collezione, una raccolta di oggetti, individui, simboli, numeri, figure… che sono detti **elementi** dell'insieme e che sono ben definiti e distinti tra di loro.
La nozione di insieme e quella di elemento di un insieme in matematica sono considerate nozioni primitive, nozioni che si preferisce non definire mediante altre più semplici.

Esempi

Sono insiemi:
1. l'insieme delle lettere della parola RUOTA;
2. l'insieme delle canzoni che ho ascoltato la settimana scorsa;
3. l'insieme delle città della Puglia con più di 15000 abitanti;
4. l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano;
5. l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5;
6. l'insieme delle montagne d'Italia più alte di 1000 metri.

Per poter assegnare un insieme occorre soddisfare le seguenti condizioni:
- bisogna poter stabilire con certezza e oggettività se un oggetto è o non è un elemento dell'insieme;
- gli elementi di uno stesso insieme devono essere differenti tra loro, cioè un elemento non può essere ripetuto nello stesso insieme.

Non possono essere considerati insiemi:
1. i film interessanti (non c'è un criterio oggettivo per stabilire se un film è interessante oppure no, uno stesso film può risultare interessante per alcune persone e non interessante per altre);
2. le ragazze simpatiche di una classe (non possiamo stabilire in maniera oggettiva se una ragazza è simpatica);
3. le montagne più alte d'Italia (non possiamo dire se una montagna è tra le più alte poiché non è fissata un'altezza limite);
4. l'insieme delle grandi città d'Europa (non c'è un criterio per stabilire se una città è grande);

1 Barra con una crocetta i raggruppamenti che ritieni siano degli insiemi:

[A]	I fiumi più lunghi d'Italia;	[F]	gli animali con 2 zampe;
[B]	Le persone con più di 30 anni;	[G]	le vocali dell'alfabeto italiano;
[C]	i numeri 1, 20, 39, 43, 52;	[H]	i professori bravi;
[D]	i libri più pesanti nella tua cartella;	[I]	i gatti con due code;
[E]	i punti di una retta;	[J]	i calciatori che hanno fatto pochi gol.

In generale:
- gli insiemi si indicano con lettere maiuscole *A, B, C*, …;
- gli elementi con lettere minuscole *a, b, c*, …;
- se un elemento *a* sta nell'insieme *A* si scrive $a \in A$, si legge "a appartiene ad A";

Il simbolo $\in$ si chiama simbolo di **appartenenza**.
- se un elemento b non sta nell'insieme A si dice che esso non appartiene all'insieme, si scrive $b \notin A$, si legge "b non appartiene ad A".

Il simbolo $\notin$ si chiama simbolo di **non appartenenza**.
Il criterio in base al quale si stabilisce se un elemento appartiene a un insieme si chiama **proprietà caratteristica**.
Gli elementi di un insieme si elencano separati dalla virgola e racchiusi tra parentesi graffe.

$$A=\{a, b, c, d\}$$

Alcuni simboli sono utilizzati per indicare alcuni insiemi specifici:
- $\mathbb{N}$ si utilizza per indicare l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$;
- $\mathbb{Z}$ si utilizza per indicare i numeri interi relativi: $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,...\}$
- $\mathbb{Q}$ si utilizza per indicare i numeri razionali: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{17}, 12{,}34, 0{,}\overline{25}...\right\}$

Esempio

Indica con il simbolo opportuno quali dei seguenti elementi appartengono o non appartengono all'insieme A dei giorni della settimana: lunedì, martedì, gennaio, giovedì, dicembre, estate.

Svolgimento:
Gennaio e dicembre sono mesi dell'anno, perciò scriviamo:

$lunedì \in A$ $martedì \in A$ $gennaio \notin A$
$giovedì \in A$ $dicembre \notin A$ $esate \notin A$

Consideriamo l'insieme $A=\{r, s, t\}$ e l'insieme *B* delle consonanti della parola "risate". Possiamo osservare che *A* e *B* sono due insiemi costituiti dagli stessi elementi; diremo pertanto che sono **insiemi uguali**.

DEFINIZIONE. Due insiemi *A* e *B* si dicono **uguali** se sono formati dagli stessi elementi, anche se disposti in ordine diverso: in simboli *A=B* . Due insiemi A e B si dicono **diversi** se non contengono gli stessi elementi: in simboli $A \neq B$.

Esempi

- Gli insiemi A dei numeri naturali dispari minori di 5 e $B=\{1,3\}$ sono uguali.
- Gli insiemi L delle vocali della parola LUIGI, e l'insieme G delle vocali della parola GIGI sono diversi, poiché $u \in L$ ma $u \notin G$.

2 Per ciascuno dei seguenti casi inserisci il simbolo adatto fra $\in, \notin$.

Sia *A* l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano:

a)b … A c)j … A e)w … A
b)i … A d)e … A f)z … A

3 Le vocali delle parole che seguono formano insiemi uguali, tranne in un caso. Quale?

[A] sito [B] micio [C] zitto [D] fiocco [E] lecito [F] dito

4 Individua tra i seguenti insiemi quelli che sono uguali

[A] vocali della parola SASSO
[B] vocali della parola PIETRA
[C] consonanti della parola SASSO
[D] vocali della parola PASSO

► 2. Insieme vuoto e insieme universo

Consideriamo l'insieme *A* = {consonanti diverse da B della parola "BABBO"}.
Poiché la parola "BABBO" contiene solo la consonante B l'insieme *A* è privo di elementi.
Un insieme privo di elementi si chiama **insieme vuoto**, lo si indica con il simbolo $\emptyset$ o { }.

Osservazione

$\{\}=\emptyset$ ma $\{\emptyset\}\neq\emptyset$ dato che $\{\emptyset\}$ rappresenta un insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto.

Esempi

- L'insieme dei numeri negativi maggiori di 5 è vuoto.
- L'insieme delle capitali europee con meno di 50 abitanti è vuoto.
- L'insieme dei numeri naturali minori di 0 è vuoto.

5 Indica se gli insiemi G ={gatti con 6 zampe} e P = {polli con 2 zampe} sono o non sono vuoti.

6 Barra con una croce gli insiemi vuoti

[A] L'insieme dei numeri positivi minori di 0.
[B] L'insieme dei numeri negativi minori di 100.
[C] L'insieme dei numeri pari minori di 100.
[D] L'insieme delle capitali europee della regione Lombardia.
[E] L'insieme dei triangoli con quattro angoli.
[F] L'insieme delle capitali italiane del Lazio.
[G] L'insieme dei punti di intersezione di due rette parallele.

La frase "l'insieme degli studenti che vengono a scuola con il motorino" non definisce un insieme particolare. Occorre definire il contesto, l'ambiente che fa individuare gli elementi dell'insieme. Se l'ambiente è la classe 1C gli elementi saranno certamente diversi, probabilmente meno numerosi, di quelli che compongono l'ambiente di un'intera scuola o di un'intera città. Quando si identifica un insieme, occorre indicare anche l'ambiente di riferimento da cui trarre gli elementi che appartengono al nostro insieme. Questo insieme si chiama **Insieme Universo** e rappresenta il contesto, l'ambiente su cui faremo le nostre osservazioni. In generale un insieme universo per un insieme A è semplicemente un insieme che contiene A. Solitamente si indica con U l'insieme universo.

7 Se A è l'insieme dei calciatori del Milan, indica almeno tre insiemi che possono essere l'insieme universo in cui è collocato A.

► 3. Cardinalità di un insieme

Si definisce cardinalità (o potenza) di un insieme finito il numero degli elementi dell'insieme. Viene indicata con uno dei seguenti simboli |A|, #(A) o *card*(A).
Per poter parlare di cardinalità di un insieme qualsiasi, che comprenda anche insiemi infiniti come gli insiemi numerici, occorre una definizione più complessa che qui non daremo.

Esempi

- L'insieme A delle vocali dell'alfabeto italiano ha 5 elementi, quindi *card*(A)=5.
- L'insieme B dei multipli di 3 minori di 10 ha 3 elementi, quindi *card*(B)=3.

8 Un insieme vuoto è:
[A] un insieme costituito da pochi elementi;
[B] un insieme privo di elementi;
[C] un insieme costituito da un numero di elementi insufficiente per formare un insieme.

9 Quali delle seguenti scritture sono corrette per indicare l'insieme vuoto?
[A] $\emptyset$ [B] 0 [C] $\{\emptyset\}$ [D] $\{0\}$ [E] {}

10 Quale scrittura si usa per indicare che un elemento *c* appartiene ad un insieme *C*?
[A] $c \subset C$ [B] $c \in C$ [C] $c \not\subset C$ [D] c / C [E] $c \ni C$

11 Quali delle seguenti frasi rappresentano criteri oggettivi per individuare un insieme? Spiega perché.

a) Le città che distano meno di 100 Km da Lecce.	V	F
b) I laghi d'Italia.	V	F
c) Le città vicine a Roma.	V	F
d) I calciatori della Juventus.	V	F
e) I libri di Mauro.	V	F
f) I professori bassi della tua scuola.	V	F
g) I tuoi compagni di scuola il cui nome inizia per M.	V	F
h) I tuoi compagni di classe che sono gentili.	V	F
i) Gli zaini neri della tua classe.	V	F

12 Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra $\in$ e $\notin$:
a)La Polo …... all'insieme delle automobili Fiat.
b)Il cane …... all'insieme degli animali domestici.
c)La Puglia …... all'insieme delle regioni italiane.
d)Firenze …... all'insieme delle città francesi.
e)Il numero 10 …... all'insieme dei numeri naturali.
f)Il numero 3 …... all'insieme dei numeri pari.

13 Quali delle seguenti proprietà sono caratteristiche per un insieme?

a)Essere città italiana il cui nome inizia per W	V	F
b)Essere un bravo cantante	V	F
c)Essere un monte delle Alpi	V	F
d)Essere un ragazzo felice	V	F
e)Essere un numero naturale grande	V	F
f)Essere un ragazzo nato nel 1985	V	F
g)Essere gli alunni della classe 1ª C	V	F
h)Essere le lettere dell'alfabeto inglese	V	F

i)Essere le rette del piano V F
j)Essere i libri interessanti della biblioteca V F
k)Essere gli italiani viventi nati nel 1850 V F
l)Essere gli italiani colti V F
m)Essere i numeri naturali molto grandi V F
n)Essere gli attori vincitori del Premio Oscar del 1990 V F

14 Quali dei seguenti insiemi sono vuoti? Per gli insiemi non vuoti indica la cardinalità.
Ricorda che la cardinalità di un insieme è il numero di elementi di cui è costituito.
a)L'insieme degli uccelli con 6 ali
b)L'insieme delle lettere della parola "VOLPE"
c)L'insieme dei cani con 5 zampe
d)L'insieme delle vocali della parola "COCCODRILLO"
e)L'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano
f)L'insieme degli abitanti della luna
g)L'insieme dei numeri sulla tastiera del telefonino

15 Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra = e ≠
a)L'insieme delle lettere della parola "CANE" e della parola "PANE" sono …...
b)L'insieme delle vocali della parola "INSIEME" e della parola "MIELE" sono …...
c)L'insieme delle consonanti della parola "LETTO" e della parola "TETTO" sono …...
d)L'insieme delle lettere della parola "CONTRO" e della parola "TRONCO" sono …...
e)L'insieme delle vocali della parola "LIBRO" e della parola "MINISTRO" sono …...
f)L'insieme delle vocali della parola "DIARIO" e della parola "RAMO" sono …...
g)L'insieme delle lettere della parola "MOUSE" e della parola "MUSEO" sono …...
h)L'insieme delle consonanti della parola "SEDIA" e della parola "ADESSO" sono …...
i)L'insieme dei numeri pari minori di 5 e l'insieme vuoto sono …...
j)L'insieme dei numeri pari e l'insieme dei multipli di 2 sono …...

16 Scrivi per ciascun insieme un possibile insieme universo
a) L'insieme dei rettangoli
b) L'insieme dei multipli di 3
c) L'insieme delle lettere della parola "MATEMATICA"
d) L'insieme dei libri di matematica
e) L'insieme dei ragazzi che hanno avuto una insufficienza in matematica

17 Dato l'insieme A = {0, 3, 5} determina se le seguenti affermazioni sono vere o false
a) $0 \in A$ c) $\emptyset \in A$ e) $A \in A$
b) $\{5\} \in A$ d) $\{\emptyset\} \in A$ f) $\{3,5\} \in A$

18 Le stelle dell'universo formano un insieme, le stelle visibili a occhio nudo formano un insieme? Spiega il tuo punto di vista.

2. RAPPRESENTAZIONE DEGLI INSIEMI

Esistono diversi modi per rappresentare un insieme e quindi per indicare con precisione i suoi elementi.

►1. Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare è la descrizione più elementare di un insieme; consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e racchiusi tra le parentesi graffe.
Per esempio, definiamo un insieme X con la scrittura:

$$X=\{1, 2, 3, 5\}$$

Non è importante l'ordine in cui vengono scritti gli elementi, cioè

$$X=\{1, 2, 3, 5\}=\{2, 1, 5, 3\}$$

É invece necessario che gli elementi dell'insieme compaiano ciascuno una sola volta. Ad esempio per rappresentare l'insieme Y delle lettere della parola autunno, scriviamo Y = { a,u,t,n,o}, scrivendo una volta sola le lettere che nella parola sono ripetute.
Si può utilizzare questa rappresentazione anche per insiemi numerosi e addirittura infiniti. In questi casi si elencano i primi elementi dell'insieme e in fondo all'elenco si mettono tre punti di sospensione lasciando intendere come continuare la serie.
Per esempio l'insieme dei multipli di 3 si può indicare con la seguente rappresentazione tabulare

$$X=\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}$$

Esempi

- L'insieme G dei primi 3 giorni della settimana si indica: G={lunedì, martedì,mercoledì}
- L'insieme A delle lettere della parola "Associazione" si indica: A={a, s, o, c, i, z, n, e}

19 Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme A dei numeri naturali minori di 6.
Svolgimento: I numeri naturali minori di 6 sono ……………… pertanto A={... … … … … … ...}

20 Dai una rappresentazione tabulare dei seguenti insiemi

a) A delle vocali della parola "ESERCIZI"
b) B delle lettere della parola "RIFLETTERE"
c) C dei numeri naturali compresi tra 6 e 12, estremi esclusi
d) D dei numeri dispari compresi tra 10 e 20
e) E delle lettere dell'alfabeto italiano
f) F dei numeri naturali minori di 10
g) G dei multipli di 7

►2. Rappresentazione per proprietà caratteristica

Per quegli insiemi i cui elementi soddisfano una certa proprietà che li caratterizza, possiamo usare proprio questa proprietà per descrivere più sinteticamente un insieme.
Per esempio, l'insieme Y dei divisori di 10 può essere definito come

$$Y=\{x / x \text{ è un divisore di } 10\}$$

si legge "Y è l' insieme degli elementi x tali che x è un divisore di 10".
In questa scrittura si mette in evidenza la caratteristica che deve essere soddisfatta dagli elementi dell'insieme.
La rappresentazione tabulare dello stesso insieme è Y={1, 2, 5, 10} .
La rappresentazione per proprietà caratteristica dell'insieme X dei numeri naturali minori di 15 è:

$$X=\{x\in\mathbb{N} / x<15\}$$

Si legge "X è l' insieme dei numeri naturali x tali che x è minore di 15".
L'insieme che viene indicato nella prima parte della rappresentazione (nell'ultimo esempio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) è l'**insieme universo** definito precedentemente.
Questo metodo è particolarmente utile quando l'insieme da rappresentare contiene un elevato numero di elementi.

Esempi

- L'insieme A delle rette incidenti a una retta t assegnata si può rappresentare in questo modo:
$$A=\{r \,/\, r \text{ è una retta incidente a } t\}$$
- L'insieme B dei numeri naturali maggiori di 100 può essere rappresentato in questo modo:
$$B=\{n\in\mathbb{N} / n>100\}$$
- L'insieme P dei numeri pari può essere rappresentato come:
$$P=\{n\in\mathbb{N} / n=2\cdot m \quad \text{con} \quad m\in\mathbb{N}\}$$
- L'insieme C dei numeri interi relativi compresi tra -10 e +100, estremi inclusi, si può rappresentare come: $C=\{n\in\mathbb{Z} / -10\leq n\leq 100\}$
- L'insieme D che ha come rappresentazione tabulare D={1, 3, 5, 7, 9} può essere rappresentato mediante proprietà caratteristica nel seguente modo:
$$D=\{n\in\mathbb{N} / n \, è \, numero \, dispari \, minori \, di \, 10\}$$

Oppure nel seguente modo:
$$D=\{n\in\mathbb{N} / n \, è \, una \, cifra \, del \, numero \, 57931\}$$

21 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme
D= {S, T, U, D, I, A, R, E} D={x/ x è ……………………………………………………………}

22 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme
X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} $X=\{x\in\mathbb{N} / x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

23 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme dei numeri primi minori di 1000.

24 Elenca gli elementi dell'insieme $I=\{n\in\mathbb{N} / n \, è \, divisore \, di \, 12\}$

25 Elenca gli elementi dell'insieme $I=\{n\in\mathbb{N} / n \, è \, multiplo \, di \, 3 \, minore \, di \, 20\}$

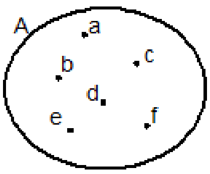
26 Dato l'insieme A={2, 4, 8, 16, 32, 64} quale delle seguenti proprietà caratterizzano i suoi elementi?
[A] $A=\{n\in\mathbb{N} / n \, è \, numero \, pari \, minore \, di \, 65\}$
[B] $A=\{n\in\mathbb{N} / n \, è \, una \, potenza \, di \, 2\}$
[C] $A=\{n\in\mathbb{N} / n \, è \, una \, potenza \, di \, 2 \, minore \, di \, 65\}$
[D] $A=\{n\in\mathbb{N} / n=2^m, con \, m=1,2,3,4,5,6\}$

27 Indica con una proprietà caratteristica l'insieme B={5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}.

28 Indica con una proprietà caratteristica l'insieme B={4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81}.

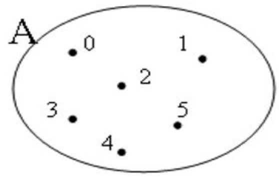
►3. Rappresentazione grafica (Diagramma di Venn)

In questa rappresentazione grafica, detta anche **rappresentazione di Eulero-Venn**, in onore dei matematici Leonhard Euler (1707–1783) e John Venn (1834–1923), si disegna una linea chiusa all'interno della quale gli elementi dell'insieme si indicano con dei punti. Solitamente si scrive all'esterno il nome dell'insieme e vicino ai punti i nomi degli elementi.

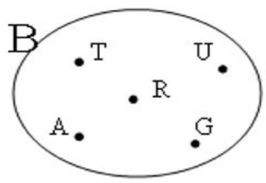


Esempi

- A è l'insieme dei numeri naturali minori di 6, A={0, 1, 2, 3, 4, 5}



- B è l'insieme delle lettere della parola "TARTARUGA", A={t, a, r, u, g}



Un insieme può essere rappresentato con una qualsiasi delle rappresentazioni indicate. Tuttavia, se un insieme è infinito o è costituito da un numero elevato di elementi la rappresentazione più pratica è quella per caratteristica.

Esempi

Vediamo come è possibile rappresentare l'insieme *C* dei multipli di 5:

- Rappresentazione per caratteristica:

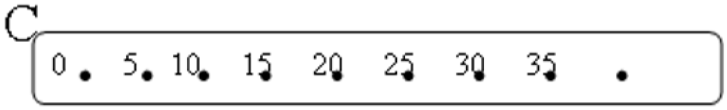
$C=\{n \in \mathbb{N} / n \text{ è multiplo di } 5\}$ oppure $C=\{n \in \mathbb{N} / n=5 \cdot m, m \in \mathbb{N}\}$

- Rappresentazione tabulare:

C={0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...}

I puntini di sospensione indicano che l'elenco continua.

- Rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn:



29 Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme:
a) dei multipli di 3 compresi tra 10 e 30, estremi inclusi;
b) delle note musicali;
c) dei numeri primi minori di 20;
d) delle consonanti della parola MATEMATICA;
e) delle province della Toscana.

30 Rappresenta i seguenti insiemi con rappresentazione tabulare, caratteristica e grafica:
a) Insieme A dei divisori di 30.
b) Insieme B dei numeri pari minori o uguali a 10.
c) L'insieme C delle province della Puglia.
d) L'insieme D delle lettere della parola "COCCO".

31 Quale delle seguenti è una rappresentazione per caratteristica dell'insieme D = {3, 6, 9, 12, 15, 18}.

[A] $D=\{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 18\}$ [B] $D=\{x \in \mathbb{N} / x \text{ è multiplo di } 3 \text{ e } x<20\}$

[C] $D=\{x \in \mathbb{N} / x=3\text{x}\}$ [D] $D=\{x \in \mathbb{N} / x=3\}$

32 Indica in rappresentazione tabulare i seguenti insiemi.
a) $A=\{x \in \mathbb{N} /\ x<10\}$ … … … … … … … … … … …
b) $B=\{x \in \mathbb{N} /\ 2 \leq x<5\}$ … … … … … … … … … … …
c) $C=\{x \in \mathbb{N} /\ 5 \leq x \leq 10\}$ … … … … … … … … … … …
d) $D=\{x \in \mathbb{N} /\ 2x \leq 10\}$ … … … … … … … … … … …
e) $E=\{e \in \mathbb{N} /\ 5 \leq x<10\}$ … … … … … … … … … … ...
f) $F=\{f \in \mathbb{N} /\ f \text{ è multiplo di } 3 \text{ e } f<15\}$ … … … … … … … … … … ...
g) $G=\{g \in \mathbb{N} /\ g \text{ è una cifra del numero } 121231\}$ … … … … … … … … … … …
h) $H=\{h \in \mathbb{N} /\ h=3n+1,\ con\ n \in \mathbb{N}\}$ … … … … … … … … … … …

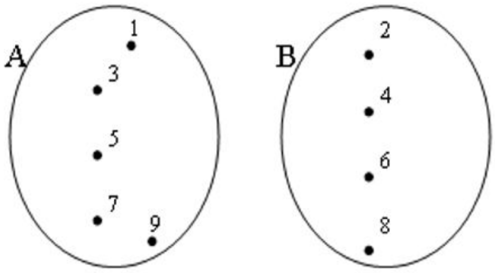
33 Rappresenta nel modo che ritieni più opportuno gli insiemi i cui elementi sono:
a) I numeri naturali multipli di 5 compresi tra 10 e 10000.
b) I colori dell'arcobaleno.
c) I numeri razionali maggiori o uguali a 2/7.
d) I punti di una superficie S.
e) Le lettere di cui è composto il tuo nome.

34 Quale delle seguenti frasi individua la proprietà caratteristica di A={4, 8, 12, 16, 20, ...}

[A] I multipli di 2 [B] i numeri pari [C]i multipli di 4 [D] i divisori di 20

35 Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi
a) A={5, 6, 7, 8, 9, 10}
b) B={0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 98, 99, 100}
c) C={3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}

36 In base agli insiemi A e B rappresentati dai diagrammi di Venn stabilisci quali affermazioni sono vere:



a) $5 \notin B$ V F
b) $A = \emptyset$ V F
c) $3+2 \in A$ V F
d) $B \neq \emptyset$ V F
e) $6 \in B$ V F
f) $9 \notin A$ V F

37 Dati gli insiemi:

X={8, 9, 10}, Y={0, 8, 9, 10}, H={10, 9, 8}

$W=\{w \in \mathbb{N} /\ 8 \leq w \leq 10\}$, $Z=\{z \in \mathbb{N} /\ 8 < z \leq 10\}$, $J=\{j \in \mathbb{N} /\ 7 < j < 11\}$

Individua le uguaglianze corrette

[A] X = Y [B] X = H [C] W = H
[D] X = Z [E] *card*(Z)=2 [F] X = J

38 Rappresenta i seguenti insiemi con la proprietà caratteristica:

a) A={gennaio, maggio, giugno, luglio, agosto}
b) B={Gorizia, Pordenone, Trieste, Udine}
c) C={sabato, domenica}
d) D={10, 20, 30, 40, 50}
e) E={Puglia, Piemonte}

39 Siano dati gli insiemi:

A={g, a, t, o} B={o, g, t, a} C={c/c è una lettera della parola “gatto”}
D={g, t} E={gatto} F={f / f è una consonante della parola “gatto”}

Segna con una crocetta le uguaglianze corrette:

[A] A = B [C] A = C [E] C = E [G] *card*(C)= 5 [I] *card*(E)=5
[B] A = D [D] E = A [F] D = F [H] D = E [L] C = D

40 Per ciascuno dei seguenti insiemi indica alcuni elementi.

a) $X=\{x \in \mathbb{N} /\ x-1 \text{ è un numero pari}\}$ {… … … … … … … … … … … …}
b) $Y=\{y \in \mathbb{N} /\ y=3n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ {… … … … … … … … … … … …}
c) $Z=\{z \in \mathbb{N} /\ z=3n \text{ e } z \text{ non è divisibile per } 2, n \in \mathbb{N}\}$ {… … … … … … … … … …}
d) $W=\{w \in \mathbb{N} /\ w<0\}$ {… … … … … … … … … … … …}

41 Quali delle seguenti scritture sono vere?

a) $5 \in \{10, 8, 6, 4, 2\}$ V F
b) $15 \in \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant 10\}$ V F
c) $7 \in \{n \in \mathbb{N} / n+5 < 10\}$ V F
d) $l \notin \{x / x \text{ è una lettera della parola 'scuola'}\}$ V F

42 Elenca per tabulazione gli elementi di $A=\{x \mid x \in N, x \text{ è pari}, x \leq 10, x \neq 0\}$.

43 Elenca per tabulazione gli elementi di $L=\{l / l \text{ è una lettera della parola } MATEMATICA\}$
$A=\{x \mid x \in N, x \text{ è pari}, x \leq 10, x \neq 0\}$.

44 Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

A={1+3, 5-2, 1+1, 9-8, 1-1} $B=\{n \in \mathbb{N} / n<5\}$ C={6-4, 6+4, 6-6}

45 Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

A={p, a, n, e} B={pane} C={pena} D={p, e, n, a}

46 Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

[A] $A=\{x \in \mathbb{N} /\ 3 \leqslant x \leqslant 12\}$ [C] $A=\{x \in \mathbb{N} /\ 2 < x < 13\}$
[B] $B=\{x \in \mathbb{N} / x=3\text{n} \ \ con \ \ 1 \leqslant n \leqslant 4\}$ [D] $B=\{x \in \mathbb{N} / x=3^n \ \ con \ \ n=1,2,3,4\}$

3. OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

►1. Sottoinsieme

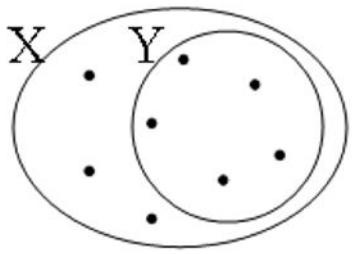
Consideriamo l'insieme *A* degli abitanti di Milano e l'insieme *B* degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme *B* sono anche elementi di *A*: si dice che *B* è sottoinsieme di *A*, si scrive $B \subseteq A$.
Nel caso in cui tutti gli elementi di *Y* siano elementi di *X* e tutti gli elementi di *X* siano elementi di *Y* si ha che *X*=*Y*, e *Y* si dice **sottoinsieme improprio** di *X:*

se $X \subseteq Y$ *e* $Y \subseteq X$ allora $Y = X$.

Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto $\emptyset$, cioè qualunque sia l'insieme X risulta che $\emptyset \subset X$. **L'insieme vuoto è considerato un sottoinsieme improprio di qualunque insieme**.
Ogni insieme è sottoinsieme improprio di se stesso.
Se *Y* è un sottoinsieme di *X* e *X* ha altri elementi oltre a quelli di *Y* si dice che *Y* è un **sottoinsieme proprio** di *X* e si scrive $Y \subset X$. La scrittura $A \subseteq B$ si usa quando non si sa in modo certo se $A = B$ o $A \subset B$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *X* e *Y*, si dice che *Y* è un **sottoinsieme** di *X* se ogni elemento di *Y* è anche elemento di *X*.
In simboli: $Y \subseteq X$, che si legge *"Y è incluso in X" o "Y è sottoinsieme di X"*.

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



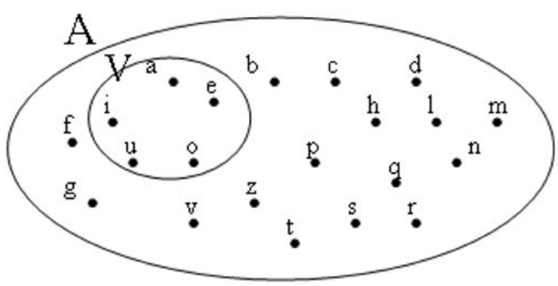
Se *a* è un elemento del sottoinsieme *Y*, allora lo sarà anche dell'insieme *X*:

se $a \in Y$ e $Y \subseteq X$ allora $a \in X$.

Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli $X \subseteq X$.
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme *X* risulta $\emptyset \subseteq X$.
Consideriamo l'insieme *X* = {lettere della parola "autunno"} e l'insieme *Y* = {lettere della parola "notaio"}; possiamo affermare che "ogni" elemento di *Y* è anche elemento di *X*? La risposta è negativa: $i \in Y$ ma $i \notin X$ quindi *Y* non è sottoinsieme di *X* e si scrive $Y \not\subset X$

<u>Esempio</u>

Sia *A* l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e *V* l'insieme delle vocali, allora si può scrivere $V \subset A$; cioè V è un sottoinsieme proprio di *A*, come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



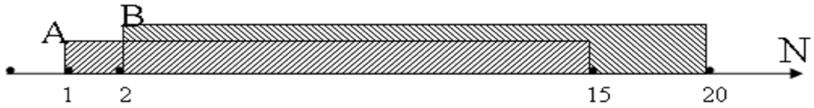
<u>Esempio</u>

Sia $C = \{1\}$, allora *C* non ha sottoinsiemi propri;
mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono $C = \{1\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$.

<u>Esempio</u>

Sia *A* l'insieme delle auto esposte in un autosalone e *U* l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che *U* è un sottoinsieme di *A*, ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere $U \subseteq A$. Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora $U = \emptyset$.

47 Siano $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\leqslant x\leqslant 15\}$ e $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 2\leqslant x\leqslant 20\}$.



Quale delle seguenti affermazioni è vera:
[A] $A\subset B$ [B] $B\supset A$ [C] $A=B$ [D] $B\not\subset A$

48 Siano T={t / t è un triangolo}, R={r / r è un rettangolo}, E={e / e è un triangolo equilatero}.
Quale affermazione è vera?
[A] $R\subset T$ [B] $E\subset T$ [C] $E\subset R$ [D] $T\subset E$

49 Siano $A=\{x\in\mathbb{N} \mid \text{x è pari } e\ (1\leqslant x\leqslant 20)\}$ e $B=\{x\in\mathbb{N} \mid \text{x è multiplo di 6 } e\ (2\leqslant x\leqslant 18)\}$
[A] $A\subset B$ [B] $B\supset A$ [C] $A=B$ [D] $B\subset A$

50 Siano $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 3\leqslant x\leqslant 10\}$ e $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 2\leqslant x\leqslant 20\}$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera:
[A] $A\subset B$ [B] $B\supset A$ [C] $A=B$ [D] $A\not\subset B$

51 Sia $A=\{1,2,3,4\}$ scrivi i possibili sottoinsiemi propri e impropri di *A*.

► 2. Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme *A* dei numeri naturali compresi tra 0 e 100, a partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme *A* possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di *A*.

Esempio

Determinare tutti i sottoinsiemi di A={1,2,3}.
$\emptyset\subset A$, infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualunque insieme.
Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: {1}, {2}, {3}.
Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi: {1,2}, {1,3}, {2,3}.
L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è A stesso, possiamo scrivere: $\{1,2,3\}\subseteq A$

DEFINIZIONE. Dato un insieme *A*, si chiama **insieme delle parti** l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di *A*. In simboli: $\wp(A)$.

L'insieme delle parti di un insieme A ha sempre come elementi $\emptyset$ e *A*, quindi $\emptyset\in\wp(A)$ e $A\in\wp(A)$.

Il numero degli elementi di $\wp(A)$, cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di *A*.

Esempi

1. L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso quindi $\wp(\emptyset)=\{\emptyset\}$
2. Dato l'insieme $A=\{a\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1=\emptyset$, $S_2=\{a\}$ allora $\wp(A)=\{S_1, S_2\}$
3. Dato l'insieme $B=\{matita, penna\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1=\emptyset$, $S_2=B=\{matita, penna\}$, $S_3=\{matita\}$, $S_4=\{penna\}$ allora $\wp(A)=\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$
4. *Dato l'insieme* $B=\{1,2,3\}$ *, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono:* $S_1=\emptyset$, $S_2=B=\{1,2,3\}$, $S_3=\{1\}$, $S_4=\{2\}$, $S_5=\{3\}$, $S_6=\{1,2\}$, $S_7=\{1,3\}$, $S_8=\{2,3\}$
allora $\wp(A)=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$

Riassumendo:
se $A=\emptyset$ l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
se A ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
se A ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 3;
se A ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8;
Generalizzando, se A ha n elementi, l'insieme della parti ne ha 2^n.

52 Se $A=\{x\in\mathbb{N}|1\leq x<3\}$ allora $\wp(A)$ ha:
[A] 2 elementi [B] 3 elementi [C] 4 elementi [D] 8 elementi

53 Considera l'insieme $B=\{x\in\mathbb{N}|1<x<5\}$ e $\wp(B)$ quali delle seguenti affermazioni sono vere o false?

$\{1\}\in\wp(B)$	**[V] [F]**	$0\in\emptyset$	**[V] [F]**
$\emptyset\subset\wp(B)$	**[V] [F]**	$\emptyset\subseteq B$	**[V] [F]**
$\{2,5\}\in\wp(B)$	**[V] [F]**	$\{1,2,3\}\in\wp(B)$	**[V] [F]**
$\{\emptyset\}\in\wp(B)$	**[V] [F]**	$\{1,2,3\}\notin\wp(B)$	**[V] [F]**

54 Scrivi l'insieme che ha come insieme delle parti $\{\emptyset,\{8,10\},\{8\},\{10\}\}$.

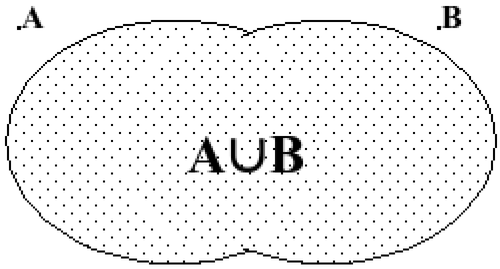
55 Dato $H=\{h|\text{ h è una lettera della parola MAMMA}\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(H)$.

56 Dato $A=\{x/x\in\mathbb{N}, n<5 \text{ e } n \text{ divisore di } 12\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(A)$.

► 3. Insieme unione

Prendiamo l'insieme *P* dei numeri pari e l'insieme *D* dei numeri dispari; allora l'insieme *N* dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi *P* e *D*.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e B, si dice **insieme unione** l'insieme *C*, composto da tutti gli elementi appartenenti ad *A* o a *B* o a entrambi. In simboli: $C=A\cup B$, si legge *"A unito a* B*" o "A unione B"*.

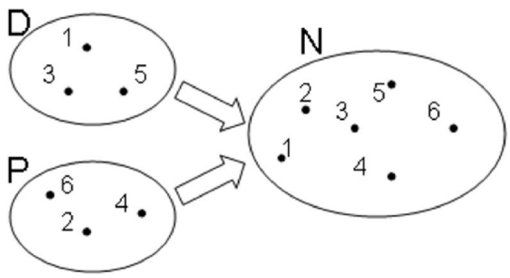


Mediante proprietà caratteristica si scrive:
$C=A\cup B=\{x|(x\in A) o (x\in B)\}$

Proprietà dell'unione tra insiemi

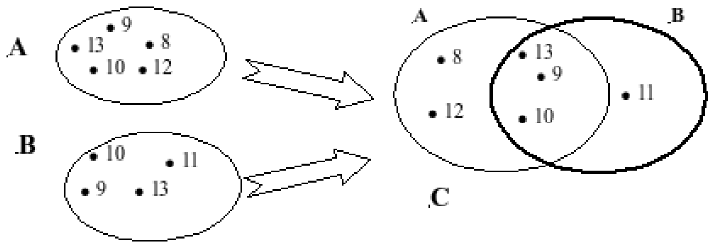
1. $A\cup B=B\cup A$ proprietà **commutativa** dell'unione
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ proprietà **associativa** dell'unione
3. *Se* $B\subset A$ *allora* $A\cup B=A$
4. $A\cup\emptyset=A$
5. $A\cup A=A$ proprietà di **idempotenza** dell'unione

<u>Esempio</u>
Siano $D=\{1,3,5\}$ e $P=\{2,4,6\}$ allora $N=P\cup D=\{1,2,3,4,5,6\}$



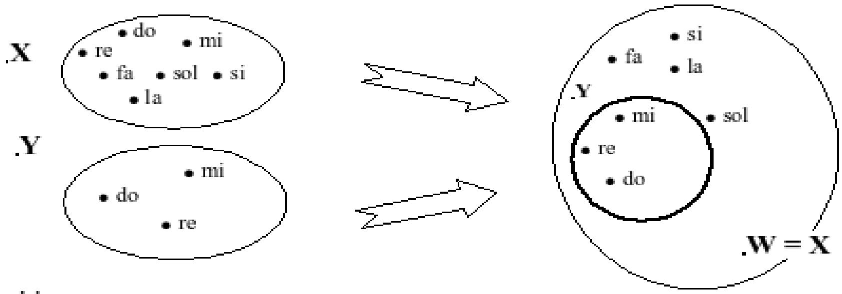
<u>Esempio</u>

Siano $A=\{8,9,10,12,13\}$ e $B=\{9,10,11,13\}$ allora $C=A\cup B=\{8,9,10,11,12,13\}$



<u>Esempio</u>

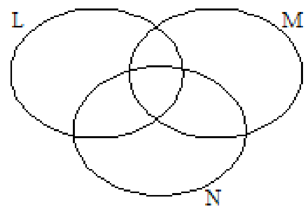
Siano $X=\{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y=\{do, re, mi\}$ allora poiché $Y\subset X$
$W=X\cup Y=X=\{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$



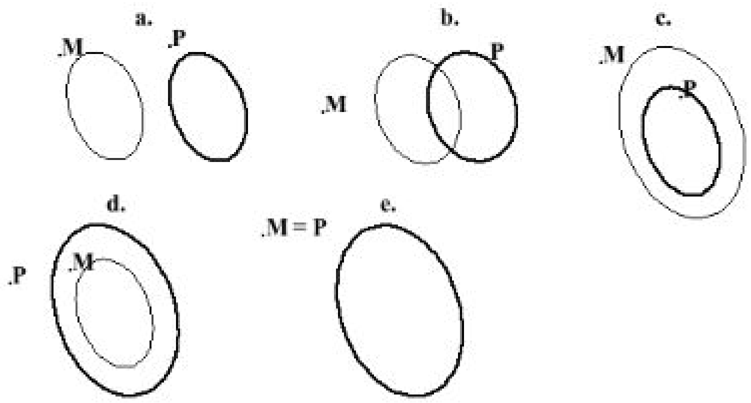
57 Dati $A=\{1,2,4,5\}$ *e* $B=\{1,3,4,5,8\}$ determina la loro unione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

58 Dati gli insiemi *C* delle lettere della parola “GIARDINO” e D delle lettere della parola “ORA” determina la loro unione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

59 Dati gli insiemi
$L=\{1,2,5,6,7,8\}$, $M=\{4,5,6,7,10\}$, $N=\{2,3,5,7,9,10\}$ determina l’insieme unione completando prima la rappresentazione grafica poi quella tabulare.



60 Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica.
Attenzione ci può essere più di una risposta corretta.



$M\subset P$	[a] [b] [c] [d] [e]	$M\not\subset P$	[a] [b] [c] [d] [e]
$P\supseteq M$	[a] [b] [c] [d] [e]	$P\subset(P\cup M)$	[a] [b] [c] [d] [e]
$M\subseteq(M\cup P)$	[a] [b] [c] [d] [e]	$M\neq P$	[a] [b] [c] [d] [e]

► 4. Insieme intersezione

Esempio

Se A è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e B è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di A stanno in B? Quali elementi di B stanno in A? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

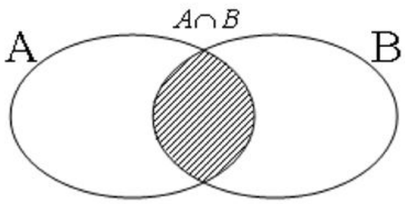
L'insieme degli elementi di *A* che stanno in *B* è {m,a,t,e,i}.

L'insieme degli elementi di B che stanno in A è {m,a,t,e,i}.

L'insieme degli elementi che stanno sia in A sia in B è {m,a,t,e,i}.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e *B*, si dice insieme **intersezione** di A e B l'insieme *C*, composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad *A* e a *B*, ossia comuni a entrambi. In simboli: $C=A\cap B$ che si legge *"A intersecato a B" o "A intersezione B".*

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C=A\cap B=\{x\mid (x\in A)e(x\in B)\}$



Se $A\cap B=\emptyset$, ossia se *A* e *B* non hanno elementi in comune, i due insiemi si dicono **disgiunti**.

Proprietà dell'intersezione tra insiemi

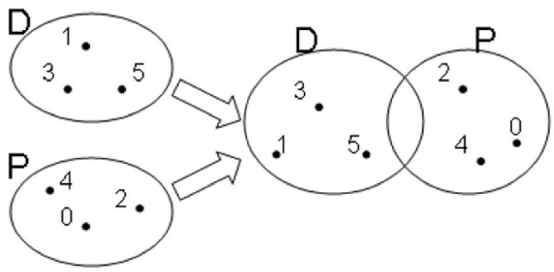
1. $A\cap B=B\cap A$ proprietà **commutativa** dell'intersezione
2. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ proprietà **associativa** dell'intersezione
3. $Se\ B\subset A\ allora\ A\cap B=B$
4. $A\cap\emptyset=\emptyset$
5. $A\cap A=A$ proprietà di **idempotenza** dell'intersezione
6. $\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa

1. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ proprietà **distributiva** dell'intersezione rispetto l'unione
2. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ proprietà **distributiva** dell'unione rispetto l'intersezione

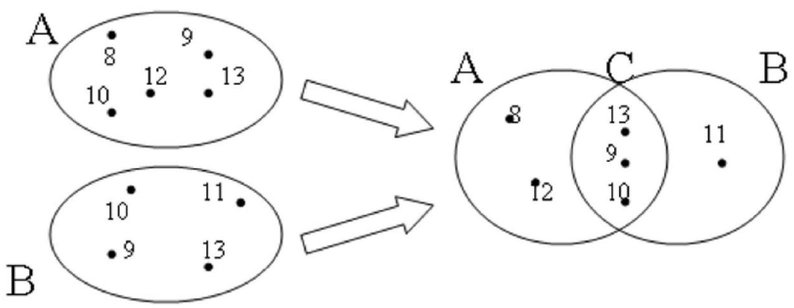
Esempio

Siano $D=\{1,3,5\}$ e $P=\{2,4,6\}$ allora $N=P\cap D=\emptyset$



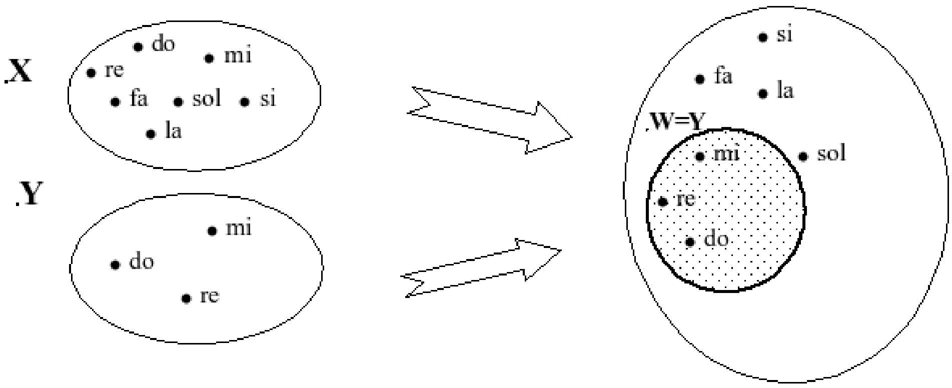
Esempio

Siano $A=\{8,9,10,12,13\}$ e $B=\{9,10,11,13\}$ allora $C=A\cap B=\{9,10,13\}$



Esempio

Siano $X=\{do,re,mi,fa,sol,la,si\}$ e $Y=\{do,re,mi\}$ allora poiché $Y\subset X$
$W=X\cap Y=Y=\{do,re,mi\}$



61 Dati $A=\{1,2,4,5\}$ e $B=\{1,3,4,5,8\}$ determina la loro intersezione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

62 Dati gli insiemi *C* delle lettere della parola “LIBRO” e D delle lettere della parola “PASTA” determina la loro intersezione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

63 Considerando i 3 insiemi $S=\{a,b,c,e,f,s,t\}$, $T=\{a,c,g,h,l,s\}$ e $U=\{b,c,d.g,s,t\}$, determina l'insieme intersezione dando sia la rappresentazione grafica sia quella tabulare.

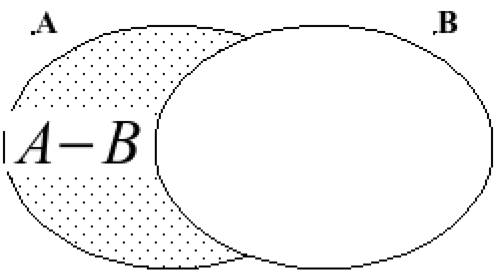
► 5. Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi *A* e *B* formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè: $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,z\}$ e $B=\{b,c,d,f,g,h,l,m,n,p,q,r,s,t,v,z\}$, le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme *A* ma non in *B* formano un nuovo insieme chiamato insieme **differenza.**

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e B, si dice insieme **differenza** l’insieme C, composto da tutti gli elementi di *A* che non appartengono a B. In simboli: $C=A-B$ che si legge *"A differenza B"*.

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C=A-B=\{x|(x\in A)e(x\notin B)\}$

La rappresentazione mediante diagramma di Eulero-Venn dell'insieme differenza



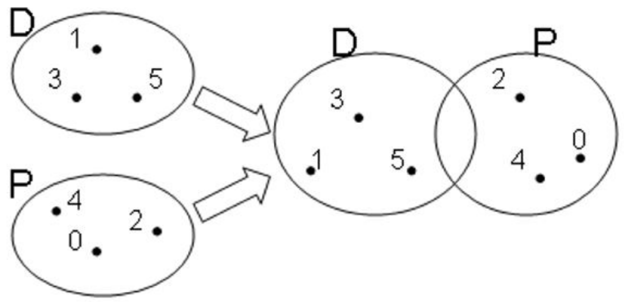
Proprietà della differenza tra insiemi

1. **Se** $A\cap B=\emptyset$ **ossia sono disgiunti allora** $A-B=A$ e $B-A=B$
2. **Se** $B\subset A$ **ossia *B* è sottoinsieme proprio di *A* allora** $B-A=\emptyset$
3. $A-A=\emptyset$
4. $A-\emptyset=A$

Esempio

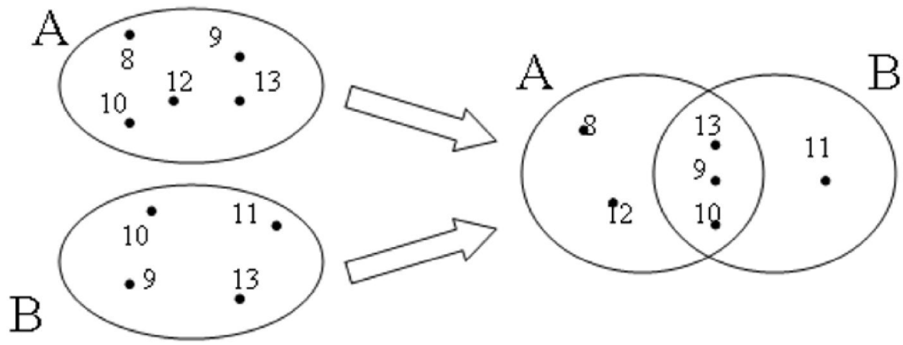
Siano $D=\{1,3,5\}$ e $P=\{0,2,4\}$ i due insiemi sono disgiunti $P\cap D=\emptyset$ allora

$$D-P=\{1,3,5\}=D$$
$$P-D=\{0,2,4\}=P$$



Esempio

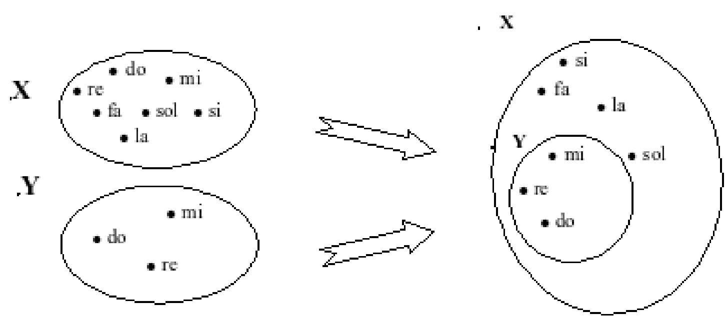
Siano $A=\{8,9,10,12,13\}$ e $B=\{9,10,11,13\}$ allora $C=A-B=\{8,12\}$ e $D=B-A=\{11\}$



Poiché $A-B\neq B-A$ nella differenza non vale la proprietà commutativa.

Esempio

Siano $X=\{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y=\{do, re, mi\}$ allora poiché $Y\subset X$
$W=X-Y=\{fa, sol, la, si\}$



64 Dati gli insiemi *E={x / x è una lettera della parola "cartellone"}*e *F={x / x è una lettera della parola "martello"}* determina *E-F* e *F-E*.

65 Dato l'insieme *A={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 32}* e il suo sottoinsieme *B* dei multipli di 3, determina gli insiemi *A-B* e *B-A*.

66 Dato l'insieme $X=\{x \in N | 10 \leq x \leq 100\}$ e $Y=\{y \in N | 10 < y < 100\}$ determina $X-Y$ e $Y-X$.

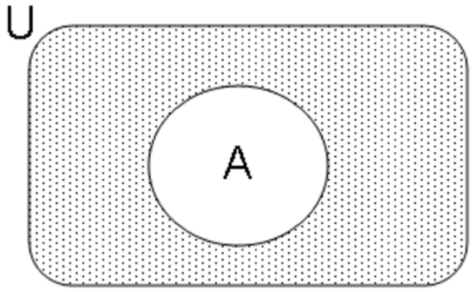
► 6. Insieme complementare

DEFINIZIONE. Dato un insieme A, uno dei possibili insiemi che contengono *A* come sottoinsieme si dice **insieme universo** o **insieme ambiente**.

Sia *W={sabato, domenica}* l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per *dì*. L'insieme *W* può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme G formato da tutti i giorni della settimana *G={lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica}*. L'insieme degli elementi di *G* che non appartengono a *W* forma un insieme che chiameremo **complementare** di W rispetto a G, l'insieme G invece si dice in questo caso insieme **universo.** Ad esempio nella rappresentazione caratteristica $A=\{x \in N | \ x \leq 100\}$ *N* è l'insieme universo di *A*.

DEFINIZIONE. Dato l'insieme *A* e scelto U come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad *A* si dice **insieme complementare** di *A* rispetto a U. In simboli: $\overline{A}$ oppure $\overline{A}_U$ oppure $C_U A$

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme complementare è:



Nella figura la parte riempita con puntini è il complementare di *A* rispetto a U, cioè $\overline{A}_U$.
Come si può vedere dal disegno, essendo $A \subseteq U$ il complementare coincide con la differenza tra insiemi: $\overline{A}_U = U - A$.

<u>Esempi</u>

1. Il complementare dell'insieme D dei numeri dispari rispetto all'insieme N dei numeri naturali è l'insieme P dei numeri pari: $\overline{D}_{\mathbb{N}} = P$,
2. Il complementare dell'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme *A* delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme *C* delle consonanti: $\overline{V}_U = C$.
3. Dati gli insieme $U=\{x \in N | \ 1 \leq x \leq 10\}$ e $B=\{x \in N | \ 1 \leq x \leq 5\}$, poiché $B \subset \mathbb{N}$ si può determinare $\overline{B}_{\mathbb{N}}=\{x \in N | \ 6 \leq x \leq 10\}$.

67 Verifica, utilizzando la rappresentazione grafica, che:
a) $\overline{A}_U \cup A = U$ b) $(A-B) \cup (B-A) \cup (\overline{A \cup B}) = \overline{A \cap B}$

68 Dati E ed F sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{E \cap F}$ è uguale a:
[A] $E \cup F$ [B] $\overline{E \cup F}$ [C] $E \cap F$ [D] $\overline{E} \cup \overline{F}$

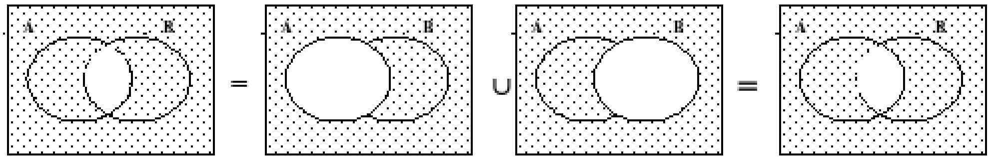
69 Dati G ed H sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{G \cup H}$ è uguale a:
[A] $\overline{G \cap H}$ [B] $\overline{G} \cap \overline{H}$ [C] $\overline{G \cap \overline{H}}$ [D] nessuno dei precedenti

► 7. Leggi di De Morgan

Dati due insiemi *A* e *B* ci sono alcune proprietà, dette **leggi di De Morgan,** che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

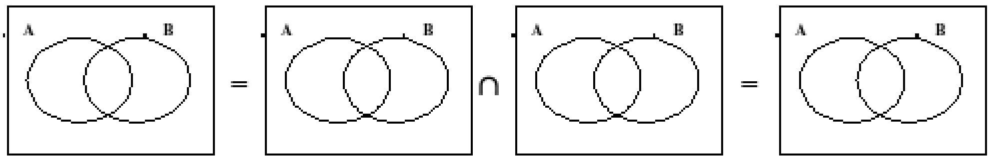
1. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ Prima legge di De Morgan
2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ Seconda legge di De Morgan

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn



$\overline{(A\cap B)}$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A}\cup\overline{B}$

70 Dimostra la 2° legge di De Morgan annerendo gli spazi opportuni



$\overline{(A\cup B)}$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A}\cap\overline{B}$

71 Dati gli insiemi *C* e *D* tali che $C\subset D$ completa le seguenti relazioni aiutandoti con la rappresentazione grafica

a) $D-C$ = … ... c) $\overline{C\cap D}$ = … … e) $C-D$ = … …

b) $D\cap\overline{C}$ = … … d) $C\cup\overline{C}$ = … … f) $C\cap\overline{C}$ = … ...

72 Quale delle seguenti scritture corrisponde a $\overline{X\cap\overline{Y}}$:

a. $\overline{X}\cup\overline{Y}$ **b.** $\overline{X}\cap\overline{Y}$ **c.** $\overline{X}\cup Y$ **d.** $X\cup\overline{Y}$

► 8. Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce – Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere $\{3,2\}$ e $\{2,3\}$ è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una **coppia ordinata** di numeri.

DEFINIZIONE. Un insieme di due elementi *a* e *b* presi in un certo ordine si dice **coppia ordinata**. Se il primo elemento della coppia è *a* ed il secondo è *b* si scrive: *(a, b)*.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e *B* non vuoti, l’insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad *A* e il secondo a B, si chiama **prodotto cartesiano** di *A* per B. In simboli: $A\times B$ che si legge *“*A per B*”* oppure *“*A prodotto cartesiano con B*”* o ancora “A cartesiano B”.

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A\times B=\{(x;y)|\, x\in A \text{ e } y\in B\}$
Nel caso in cui B=A $A\times A=A^2=\{(x;y)|\, x\in A \text{e } y\in A\}$.

<u>Esempi</u>

Sia $C=\{x,y,z\}$ il prodotto cartesiano $C\times C$ è dato dalle seguenti coppie ordinate:
$C\times C=\{(x;x),(x;y),(x;z),(y;x),(y;y),(y;z),(z;x),(z;y),(z;z)\}$

Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

$A\times\emptyset=\emptyset$ $\emptyset\times A=\emptyset$ $\emptyset\times\emptyset=\emptyset$

<u>Esempi</u>

Sia $A=\{a,b\}$ e $B=\{1,2,3\}$, il prodotto cartesiano $A\times B$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $A\times B=\{(a;1),(a;2),(a;3),(b;1),(b;2),(b;3)\}$ mentre il prodotto cartesiano $B\times A$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $B\times A=\{(1;a),(2;a),(3;a),(1;b),(2;b),(3;b)\}$.
Si può notare che $A\times B\neq B\times A$.

Poiché $A\times B\neq B\times A$ nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

73 Sia $E=\{x\in N|\ 1\leq x<3\}$, $F=\{x|\ \text{x è una vocale della parola TELEFONO}\}$ e $G=\{x\in N|\ x<-6\}$
allora

$E=\{1,\ldots\ldots\ldots\}$ $F=\{e,\ldots\ldots\ldots\}$ $G=\{\ldots\ldots\ldots\}$

$E\times F=\{(1;e),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $F\times E=\{(e;1),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

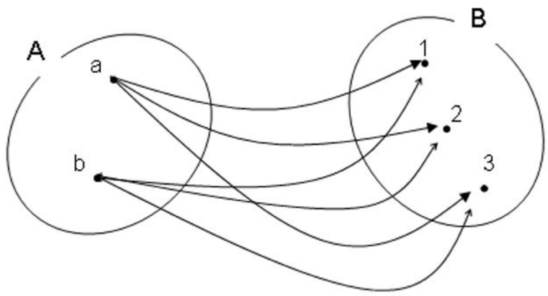
$F\times G=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $G\times E=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

- **Tabulazione delle coppie ordinate**
  Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di *A* con tutti gli elementi di B, il secondo elemento di *A* con tutti gli elementi di *B* e cosi via fino ad esaurire tutti gli elementi di A.

$$A\times B=\{(a;1),(a;2),(a;3),(b;1),(b;2),(b;3)\}$$

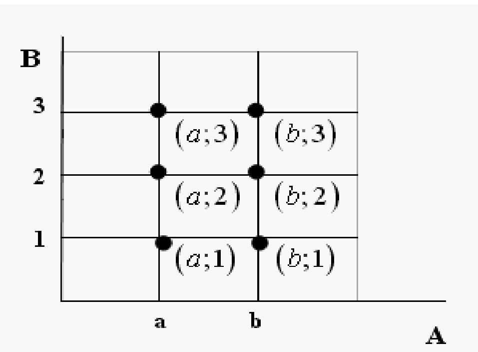
- **Diagramma a frecce**
  Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi si Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.



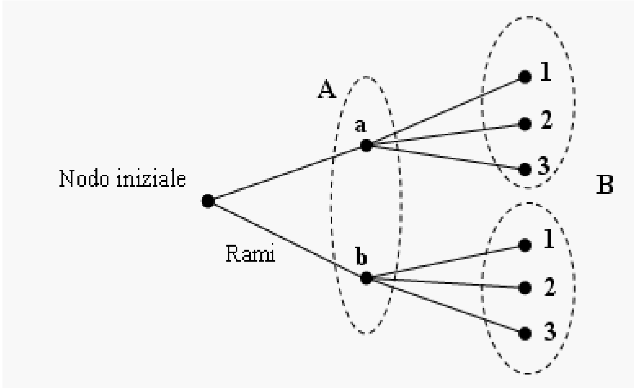
- **Tabella a doppia entrata**
  Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

A \ B	1	2	3
a	$(a;1)$	$(a;2)$	$(a;3)$
b	$(b;1)$	$(b;2)$	$(b;3)$

- **Diagramma cartesiano**
  Si tracciano due semirette una orizzontale e l'altra verticale, orientate, perpendicolari, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate **assi cartesiani.** Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

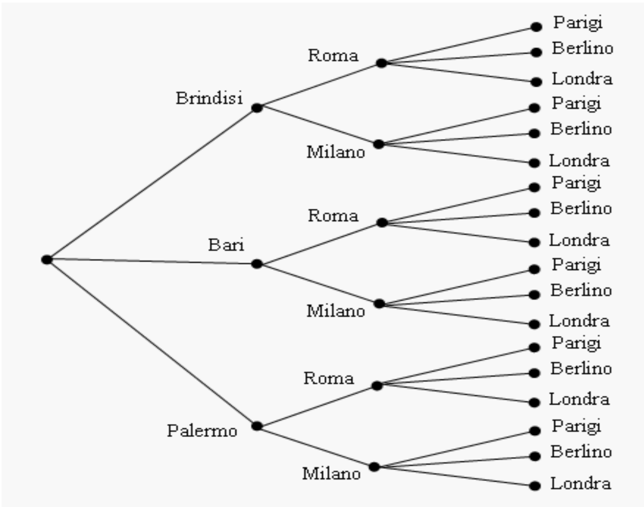


- **Diagramma ad albero**
  È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni.
  Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.
  La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.



Esempio

Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte aeree per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia $P=\{Brindisi, Bari, Palermo\}$ l'insieme delle città di partenza, $S=\{Roma, Milano\}$ l'insieme delle città di scalo e $A=\{Parigi, Berlino, Londra\}$ l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi $P\times S\times A$. Rappresentiamo $P\times S\times A$ tramite un diagramma ad albero:



74 Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A\times B$, dove *A* ha 6 elementi, *B* ne ha 3:
[A] 9 [B] 18 [C] 6 [D] Non si può sapere

75 Sapendo che $E\times F=\{(x;x),(x;y),(x;z),(y;x),(y;y),(y;z)\}$ indica gli elementi di E e di F:
$E=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $F=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

76 Se $A\times B$ ha 5 elementi, da quanti elementi possono essere costituiti *A* e B?
[A] 1; 5 [B] 3; 2 [C] 6; 1 [D] 2; 3

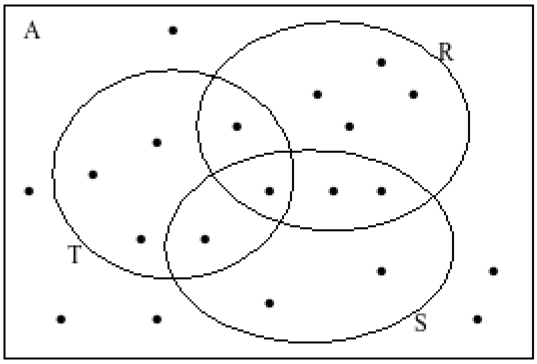
77 Dati gli insiemi $A=\{3,5,6\}$ e $B=\{-2,1\}$ costruisci il diagramma cartesiano di $A\times B$ ed elencane gli elementi .

► 9. I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

Problema 1

Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme A rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi T, R, S rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.



Quanti sono gli amici appassionati di ballo?
Quanti tra loro ballano

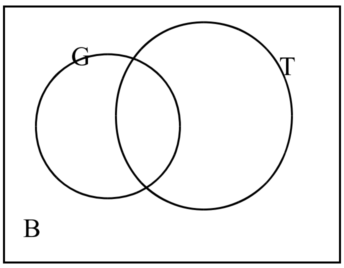
1) ***nessuno** dei balli indicati?*
2) ***almeno uno** dei balli tango, samba, rumba?*
3) ***almeno** la samba?*
4) ***solo** la rumba?*
5) *la rumba **e** il tango?*
6) ***tutti** i balli indicati?*

Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.
Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno cioè $Card(A) = 20$
Rispondiamo ora alla seconda domanda:

1) *Quanti tra loro ballano **nessuno** dei balli indicati?*
   Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme *A*, ma in nessuno degli insiemi *R*, *S*, *T* quindi appartiene al complementare di $R \cup S \cup T$ rispetto all'insieme *A*, dunque $Card(\overline{R \cup S \cup T}) = 6$.
2) *Quanti tra loro ballano **almeno uno** dei balli tra tango, samba, rumba?*
   Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme $R \cup S \cup T$, quindi $Card(R \cup S \cup T) = 14$.
3) *Quanti tra loro ballano **almeno** il samba?*
   Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme *S*, quindi $Card(S) = 6$
4) *Quanti tra loro ballano **solo** la rumba?*
   Nell'insieme *R* sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme *R* gli elementi che stanno in *S* o in *T*: $Card(R - (T \cup S)) = 4$
5) *Quanti tra loro ballano la rumba **e** il tango?*
   quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione $R \cap T$, quindi $Card(R \cap T) = 2$
6) *Quanti tra loro ballano **tutti** i balli indicati?*
   quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione $R \cap S \cap T$, quindi $Card(R \cap S \cap T) = 1$.

Problema 2

A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove oltre ad una grande giostra era stato allestito un tiro a segno con palline di gomma piuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?



Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con *B* l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con G l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con T l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Sappiamo che

$Card(G)=7\,;\ Card(G \cap T)=3;\ Card(G-T)=4;\ Card(B-(G \cup T))=2$

Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini i bambini e rispondi al quesito.

Problema 3

Alla palestra Anni Verdi, il giovedì, si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

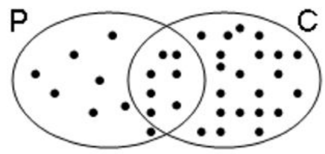
Dati:
$P=\{\text{iscritti a pallavolo}\};\ C=\{\text{iscritti a calcio}\};\ Card(P)=15;\ Card(C)=28$

Obiettivo:
Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P\cup C$

Soluzione:
Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi *P* e *C* sono disgiunti: $P\cap C=\emptyset$. Quindi:
$Card(P\cup C)=Card(P)+Card(C)=15+28=43$.

Problema 4

Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo, dalle 17.00 alle 18.30 , e allenamenti di calcio, dalle 19.00 alle 20.30 l'allenamento di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?



Dati:
$P=\{\text{iscritti a pallavolo}\};\ C=\{\text{iscritti a calcio}\}$
$Card(P)=15;\ Card(C)=28;\ Card(P\cap C)=7$

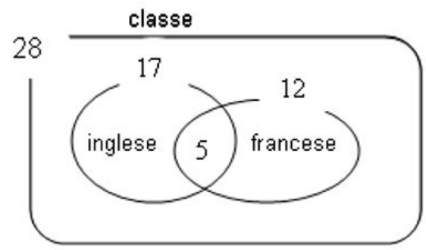
Obiettivo:
Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P\cup C$

Soluzione:
$Card(P\cup C)=Card(P)+Card(C)-Card(P\cap C)=15+28-7=36$.

Generalizzando possiamo affermare che dati due insiemi finiti *A* e *B* la cardinalità dell'insieme $A\cap B$ è data dalla seguente formula: $Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$.

Problema 5

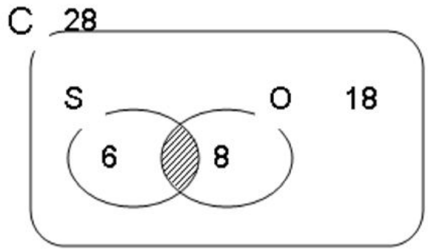
A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese, sia quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?



Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso NON sono 17+12=29, perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono 17+12-5=24. Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono 28-24=4.

Problema 6

Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficienze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?



Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.
C è l'insieme degli alunni della classe di Piero, è costituito da 28 elementi. S è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto, è costituito da 6 alunni. O è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale, è costituito da 8 elementi.
Gli elementi di $\overline{S\cup O}$ sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.
L'insieme $S\cup O$ è quindi costituito da 28-18=10 elementi.
Ricordiamo che $Card(S\cup O)=Card(S)+Card(O)-Card(S\cap O)$,
pertanto $Card(S\cap O)=Card(S)+Card(O)-Card(S\cup O)=6+8-10=4$.
In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

Problema 7

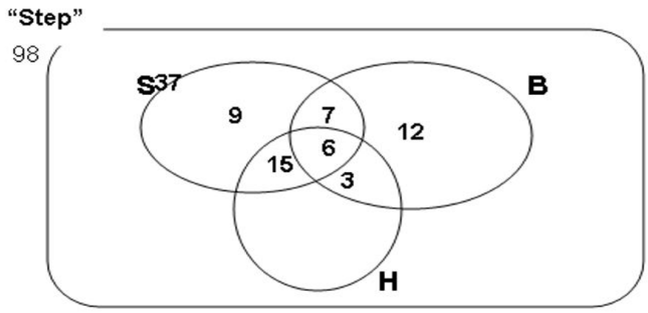
La scuola "Step" organizza corsi di Salsa, Hip Hop e Break Dance. Gli iscritti ai corsi sono in tutto 98:

- *6 frequentano tutti e tre i corsi,*
- *37 frequentano il corso di Salsa,*
- *15 solo i corsi di Salsa e di Hip Hop,*
- *7 solo i corsi Salsa e Break Dance,*
- *9 almeno Hip Hop e Break Dance.*
- *28 Salsa o Break Dance ma non Hip Hop.*

Quanti praticano solo Hip Hop?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

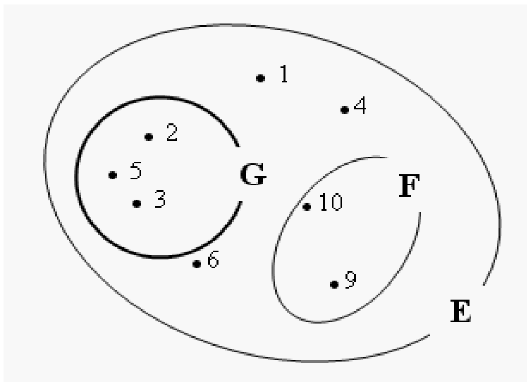
S è l'insieme degli iscritti al corso di Salsa, *B* l'insieme degli iscritti al corso di Break Dance, H l'insieme degli iscritti al corso di Hip Hop.



- $S \cap B \cap H = 6$.
- Quelli che frequentano solo il corso di salsa sono 37-15-6-7=9.
- Poiché 9 frequentano almeno Hip Hop e Break Dance, tenendo conto che 6 frequentano tutti e tre i corsi rimangono 3 che frequentano Hip Hop e Break Dance.
- Quelli che frequentano Salsa o Break Dance ma non Hip Hop sono 28, cioè significa che $Card(S \cup B - H) = 28$, da cui risulta che quelli che frequentano solo Break Dance sono 12.
- Quelli che praticano solo Hip Hop sono quindi 98-9-7-12-15-6-3=46.

78 Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri formati da tre elementi dell'insieme $C = \{a, e, i, o, u\}$

79 In base alla figura rispondi alle domande:



- L'insieme E ha 5 elementi [**V**] [**F**]
- $2 \in E$ [**V**] [**F**]
- $3 \notin G$ [**V**] [**F**]
- $F \subset G$ [**V**] [**F**]
- $F \subset E$ [**V**] [**F**]
- $\emptyset \subseteq G$ [**V**] [**F**]
- $Card(E) = 8$ [**V**] [**F**]
- $10 \in E$ [**V**] [**F**]
- $F \cap E = F$ [**V**] [**F**]
- $F \cup G = E$ [**V**] [**F**]
- $(E - F) - G = \{1,4\}$ [**V**] [**F**]

80 Dato l'insieme A={0; 1; 5; 6; 9} stabilisci quali dei seguenti sono o no suoi sottoinsiemi, completando con gli opportuni simboli le scritture a fianco indicate.

- B={1;5;6} B .... A
- C={0;1;3;5} C .... A
- D={ } D .... A
- E={0} E .... A
- F={5;6;7} F .... A
- G={6;0;1;5;9} G......... A

81 Siano dati i seguenti insiemi

$C = \{x |$ x è una lettera della parola REMARE$\}$, $D = \{x |$ x è una lettera della parola VOLARE$\}$, $E = \{x |$ x è una lettera della parola AMARE$\}$, indica quali delle seguenti relazioni sono vere:

[A] $D \subseteq C$ [B] $D \not\subset E$ [C] $C = E$ [D] $E \supseteq C$

82 Completa la seguente tabella:

Simbologia	Significato
$A=\{a,b,c,d\}$	A è formato dagli .... a, b, c, d
$a \in A$	L'elemento a .... all'insieme A
....	L'elemento f non appartiene all'insieme A
$B \subset A$	L'insieme *B* è .... nell'insieme A, ovvero *B* è un .... di A
....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A
....	L'insieme *C* è l'unione degli insiemi *A* e B.
$D=A \cap B$	L'insieme D è .... degli insiemi *A* e B.
$A \cap F=\emptyset$	A e F sono insiemi .... cioè non hanno ....
$L=C_A B$	L'insieme L è ....
....	L'insieme M è la differenza tra *A* e B.

83 Rappresenta graficamente l'insieme $A=\{x \in N \mid x \leq 25 \text{ e x è pari}\}$ e $B=\{x \in N \mid x \leq 27 \text{ e x è multiplo di } 4\}$ e stabilisci se $A \supseteq B$

84 Verifica usando i diagrammi di Eulero-Venn che se $A \subset B \text{ e } B \subset C \text{ allora } A \subset C$. Le relazioni valgono anche se il simbolo ⊂ viene sostituito con ⊆ ?

85 Dato $A=\{do, re, mi\}$ determina l'insieme delle parti $\wp(A)$

86 Considerato l'insieme $X=\{a,c,d,t,o\}$ stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- $\{x \mid \text{x è una vocale della parola CAROTA}\} \subset X$ [V] [F]
- $\{a,t\} \not\subset \wp(X)$ [V] [F]
- $\{a,t\} \in \wp(X)$ [V] [F]
- $0 \in X$ [V] [F]
- $\emptyset \in \wp(X)$ [V] [F]
- $X \in \wp(X)$ [V] [F]

87 Se U è l'insieme universo degli italiani, D l'insieme delle donne italiane, L l'insieme degli italiani laureati, S l'insieme degli italiani sposati, cosa rappresentano i seguenti insiemi?

a) $\overline{D}$ . . . .

b) $L \cap D$ . . . .

c) $\overline{L \cup D \cup S}$ . . . .

d) $L - S$ . . . .

e) $\overline{L} \cap S$ . . . .

f) $\overline{L \cap D \cap S}$ . . . .

88 Quanti elementi ha $\wp(H)$ sapendo che H ha 7 elementi?

[A] 49 [B] 64 [C] 128 [D] 7 [E] 14

89 Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\emptyset, \{Mauro\}, \{Mario\}\{Mauro, Mario\}\}$

90 Se $A \cup B=B$ cosa puoi dire di *A* e B?

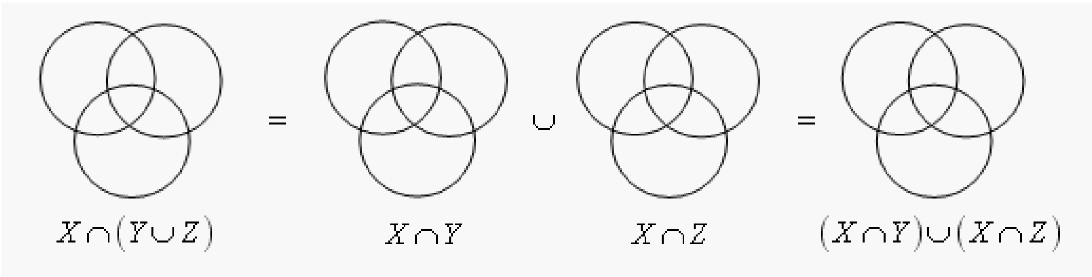
[A] $B \subseteq A$ [B] $A \notin B$ [C] $A \subseteq B$ [D] $A \subset B$ [E] $A \cap B=\emptyset$

91 Dati gli insiemi *A* = {10, 20, 30, 40, 50}, *B* = {20, 30, 50}, determina un insieme *C* tale che:

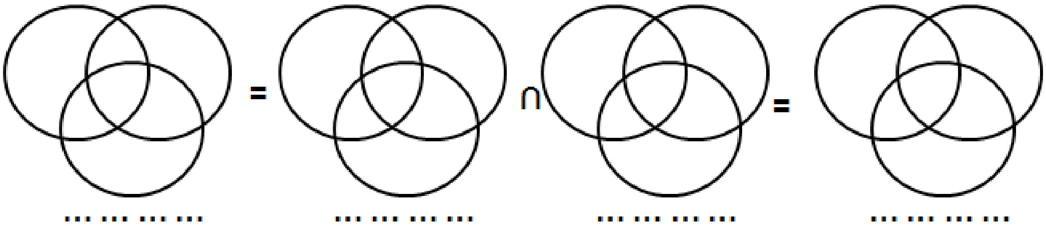
a) $B \cup C=A$ b) $A \cap C=B$ c) $C \cup C=B$ d) $C \cap C=A$

92 Dati gli insiemi $A=\{x \in \mathbb{N}, x \leq 10 \, e \, x \, pari\}$, $B=\{x \in \mathbb{N} / x \leq 20 \, e \, x \, divisibile \, per \, 4\}$, $C=\{1,2\}$ determina $(A \cap B) x C$.

93 Dimostra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione annerendo gli spazi opportuni.



94 Dimostra la proprietà distributiva dell'unione rispetto l'intersezione annerendo gli spazi opportuni e inserendo le formule opportune.



95 Se $E-F=E$ cosa puoi dire di E e F?
[A] $E\cup F=E$ [B] $E=F$ [C] $E\subseteq F$ [D] $F\subset E$ [E] $E\cap F=\emptyset$

96 Dati i seguenti insiemi $A=\{x\in N|\ x\le 25\}$, $B=\{x\in N|\ 4<x\le 9\}$, $C=\{x\in N|\ x<25\}$, $D=\{x\in N|\ x>7\}$ scegli fra i seguenti i loro complementari
a. $E=\{x\in N|\ x\ge 25\}$ **b.** $F=\{x\in N|\ x\le 6\}$ **c.** $G=\{x\in N|\ x>25\}$ **d.** $H=\{x\in N|\ x<7\}$ **e.** $I=\{x\in N|\ x<4\ e\ x\ge 8\}$ **f.** $L=\{x\in N|\ x<4\ o\ x\ge 10\}$ **g.** $M=\{x\in N|\ x\le 4\ e\ x\ge 9\}$

97 Quali dei seguenti sono sottoinsiemi dei numeri pari? L'insieme dei
[A] multipli di 4 [B] multipli di 3 [C] multipli di 6 [D] numeri primi

98 In una classe di 30 allievi 16 hanno debito in matematica, 20 in italiano, 10 non hanno avuto nessun debito. Associa ad ogni insieme il numero di elementi.

- quanti hanno debito in entrambe le materie [R.16]
- quanti hanno almeno un debito [R.20]
- quanti non hanno debito in italiano [R.10]
- quanti non hanno debito in matematica [R.14]

99 Quali dei seguenti insiemi possono essere sottoinsiemi dell'insieme dei quadrilateri? L'insieme dei
[A] quadrati [B] rombi [C] trapezi [D] triangoli equilateri
[E] poligoni [F] cerchi [G] parallelogrammi

100 Dati gli insiemi $A=\{x/x\in\mathbb{N}, x<10\}$, $B=\{x/x\in\mathbb{N}, 5<x\leqslant 16\}$, $C=\{x/x\in\mathbb{N}, x\geqslant 7\}$ determina
a) $A\cup B\cup C$
b) $A\cap B\cap C$
c) $(A\cup B)\cap C$
d) $(B\cap C)\cup A$

101 Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi
a) A={2, 4, 6, 8, 10}
b) B={1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …}
c) C={3, 4, 5, 6, 7}
d) D={-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5}
e) E={10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}
f) F={1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

102 Scrivi i primi dieci elementi dei seguenti insiemi
a) $A=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\text{n}\}$
b) $B=\{x/x\in\mathbb{N}, x=n^2\}$
c) $C=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\text{n}^2\}$
d) $D=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\text{n}+2\}$
e) $E=\{x/x\in\mathbb{N}, x=n^2-n\}$

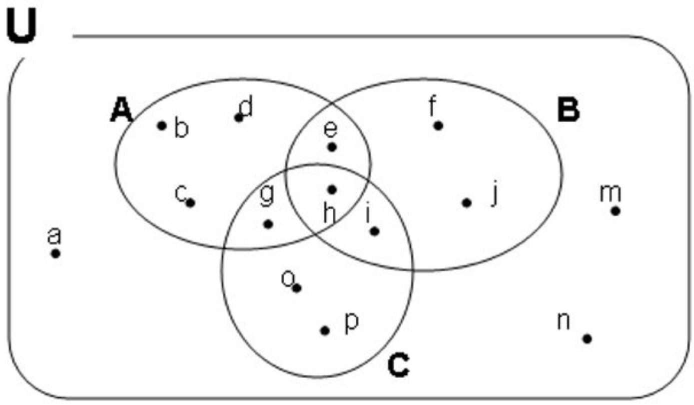
103 Dato *A = {x|x è un numero naturale, x è pari e x > 12}* determina l'insieme complementare di A.

104 A={x/ x è divisore di 12}, B={x / x è divisore di 6}, C={x / x è divisore di 15}, determina

a) $A\cup B$ b) $A\cup C$ c) $A\cup B\cup C$ d) $A\cap B$
e) $B\cap C$ f) $A\cap C$ g) $A\cap B\cap C$ h) $A\cap(B\cup C)$

105 In base agli insiemi rappresentati con il diagramma di Eulero-Venn determina gli insiemi richiesti:

a) $A\cup B$
b) $\overline{A\cup B\cup C}$
c) $A\cap B$
d) $B\cap C$
e) $A\cap B\cap C$
f) $A\cap(B\cup C)$
g) $A\cup(B\cap C)$
h) $B\cap\overline{C}$
i) $(A\cup B)-C$
j) $B\cap\overline{C}$
k) $C-(A\cap B)$
l) $\overline{(A\cup B)}-C$



106 Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme che contiene come elemento l'insieme vuoto?

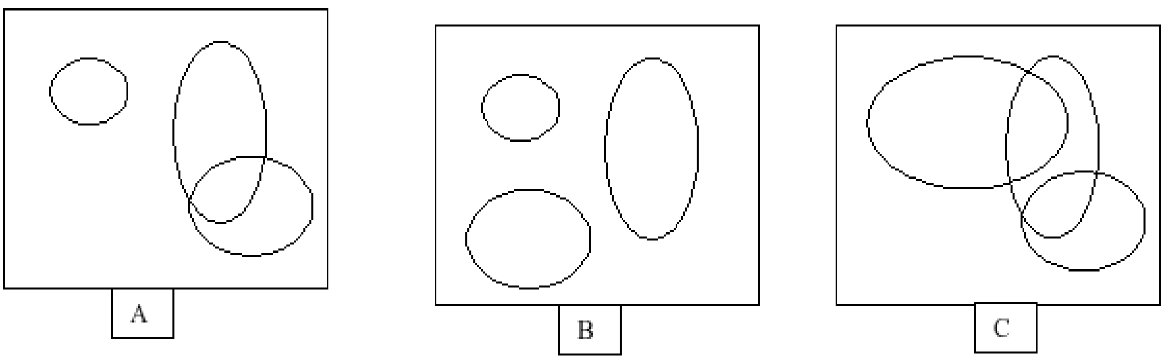
107 Dato l'insieme $U=\{x/x=2n+1, n\in\mathbb{N}, 0\leqslant n\leqslant 5\}$

a) rappresenta U in forma tabulare;
b) costruisci due sottoinsiemi propri *A* e *B* di U tali che $A\cap B=\emptyset$;
c) determina $A\cup B$ e *A-B* , dai il risultato con rappresentazione tabulare e mediante diagrammi di Eulero-Venn.

108 Il club "Argento vivo" ha 2500 iscritti; nel mese di gennaio ha organizzato alcune manifestazioni sportive alle quali hanno partecipato 850 degli iscritti e alcuni tornei di scacchi ai quali hanno partecipato in 780. 320 iscritti al club hanno potuto partecipare, grazie alla perfetta organizzazione, sia alle manifestazioni sportive sia ai tornei di scacchi. Quanti soci del club non hanno partecipato a nessuna delle iniziative e quanti invece hanno partecipato ad almeno una?

109 In una scuola di musica si tengono 4 corsi di cui quello di pianoforte è obbligatorio per tutti i 100 studenti iscritti, mentre quelli di violino, flauto e chitarra sono facoltativi. Per essere ammessi agli esami di fine anno bisogna frequentare almeno un corso oltre a quello di pianoforte. Se gli alunni:
- che frequentano il corso di flauto sono 25 e non frequentano né quello di violino, né quello di chitarra;
- iscritti sia al corso di violino sia a quello di chitarra sono 20;
- che frequentano il corso di violino sono 46;
- che frequentano solo il corso di violino sono tanti quanti quelli che frequentano solo il corso di chitarra.

Quanti alunni non possono sostenere l'esame finale? (R:3)
Quale dei seguenti diagrammi di Venn può essere preso come modello della situazione?



110 I componenti di una compagnia teatrale sanno almeno cantare, ballare, recitare. Al termine di una rappresentazione si sa che 12 hanno almeno ballato, 8 hanno almeno cantato e 16 hanno almeno recitato. La versatilità dei componenti ha permesso che 5 abbiano almeno ballato e cantato, 3 abbiano almeno cantato e recitato, 8 abbiano ballato e recitato, 2 ballerini hanno anche cantato e recitato. Quanti sono i componenti della compagnia? [R: 22]

111 Da un'indagine condotta su consumatori adulti è risultato che 605 bevono almeno vino, 582 bevono almeno latte, 348 bevono almeno birra, 140 bevono almeno vino e birra, 85 bevono almeno vino e latte, 56 bevono almeno latte e birra, 25 bevono tutte e tre le bevande mentre 71 non bevono alcuna delle bevande citate.

- Quante persone bevono una sola bevanda? [R:1048]
- Quante bevono almeno una bevanda? [R: 1279]
- Quante sono le persone intervistate? [R: 1350]

112 In una scuola di lingue sono iscritti 164 studenti; 80 seguono il corso di francese e 120 il corso di tedesco. Quanti studenti seguono entrambi i corsi? Quanti studenti seguono solo il corso di tedesco? [R: 36; 84]

113 In una pizzeria, domenica sera, erano presenti 140 persone: 50 hanno mangiato pizza e calzone, 20 hanno mangiato solo calzone e 15 non hanno mangiato né pizza né calzone. Il pizzaiolo si chiede se può conoscere in base alle precedenti informazioni, quante pizze ha preparato. Aiutalo a risolvere il suo problema illustrando la situazione con un diagramma di Venn , assegnando a ciascun insieme la sua cardinalità.

114 In un paese di 3200 abitanti arrivano due quotidiani: il primo è letto da 850 persone, il secondo da 780. Poiché 320 persone leggono entrambi i quotidiani, quante persone non leggono alcun quotidiano e quante almeno uno?

115 Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo.
Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno la necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni? (*Test di ammissione a architettura 2008*)

[A] 13 [B] 9 [C] 16 [D] 22 [E] 6

116 In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:
(*Test di ammissione a medicina 2008*)

[A] $N > 14$ [B] $N < 14$ [C] $N > 22$ [D] $N = 22$ [E] $N \geqslant 14$

4. RELAZIONI

► 1. Proposizioni e predicati

In matematica frasi come "19 è maggiore di 5" o “Giove ruota intorno alla Terra” sono considerate proposizioni perché ad esse si può attribuire un preciso valore di verità, cioè si può stabilire se sono vere oppure false: la prima è una proposizione vera, la seconda è falsa.
Non sono proposizioni in senso matematico “Cosa stai studiando?”, “domani pioverà!” , “x è un numero primo”: infatti la prima non è un'affermazione ma pone una domanda, la seconda è una esclamazione e quindi non possiamo stabilire se è vera o falsa; l’ultima contiene un elemento indeterminato e finché non si fissa il valore da attribuire a x, non si può decidere se la frase che lo riguarda è vera o falsa.
Ogni proposizione è formata da un **predicato** (verbo) e dai suoi **argomenti** (cose o persone alle quali il verbo si riferisce). Analizzando le proposizioni sopra enunciate si ha:

soggetto	predicato	Complemento
19	è maggiore di	5
Giove	ruota attorno alla	Terra

Il soggetto e il complemento sono gli argomenti ai quali il predicato si riferisce.

117 Completa la tabella come suggerito nella prima riga, individuando, per ciascuna proposizione, il predicato e gli argomenti a cui esso si riferisce :

Proposizioni	Predicato	Argomenti
a) 7 è divisore di 14	essere divisore di	7 , 14
b) 11 è maggiore di 10	essere maggiore di	..... , ...
c) 5 è numero primo		5
d) Andrea frequenta la stessa palestra di Marco		
e) Marta è moglie di Piero		
f) Paolo è padre di Marco		

In alcune proposizioni il predicato si riferisce a due argomenti (il **soggetto** e il **complemento**) in altre ad un solo argomento: nella proposizione c), il predicato "essere numero primo" stabilisce semplicemente una caratteristica del numero 5 senza porre alcuna connessione con un altro argomento.

DEFINIZIONE. Si dice **predicato binario** un predicato che si riferisce a due argomenti.

► 2. Relazioni in un insieme

Il termine **relazione** entra molto spesso in frasi del linguaggio naturale, lo usiamo per esprimere un generico legame tra due persone o tra due oggetti, anche senza specificarne la natura: "si è conclusa la relazione tra Anna e Paolo", "l'allungamento di una sbarretta di ferro è in relazione con il calore fornito", "la frana del terreno è in relazione con il disboscamento della zona e l'abusivismo edilizio", “domani consegnerò la relazione di fisica”. Sono tutte espressioni che ci danno informazioni di un qualche collegamento tra gli argomenti (persone, cose) ai quali il termine relazione si riferisce.
Dal punto di vista matematico diamo la seguente

DEFINIZIONE. Si dice **relazione in un insieme A** un **predicato binario** che lega due elementi dell'insieme.

Esempio

Nell'insieme A = {3,5,6,9,30} è introdotto il predicato binario "essere multiplo di"; con esso formiamo le proposizioni vere scegliendo soggetto e complemento nell'insieme A:

6 è multiplo di 3;	9 è multiplo di 3;	30 è multiplo di 3;	30 è multiplo di 5;
30 è multiplo di 6;	3 è multiplo di 3;	5 è multiplo di 5;	6 è multiplo di 6;
9 è multiplo di 9;	30 è multiplo di 30.		

Il predicato "essere multiplo" genera nell'insieme A una relazione matematica, esso tuttavia non è il solo che permette di collegare tra loro due elementi di quell'insieme.

118 Nell'insieme A = {3,5,6,9,30} considera il predicato "essere minore di"; con questo puoi formare proposizioni vere aventi come soggetto e come complemento due elementi di A. Scrivi le proposizioni vere come suggerito nell'esempio:

p1: 9 è minore di 30 p2: .... p3: ....

p4: .... p5: .... p6: …..................

…..

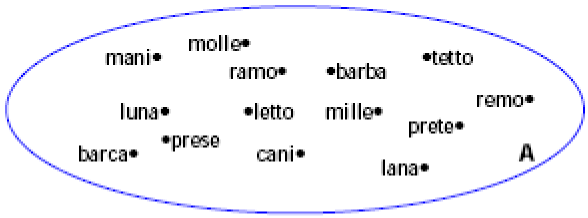
Se chiamiamo con $\Re$ il predicato binario che definisce la relazione introdotta nell'insieme, per indicare sinteticamente che la proposizione avente come soggetto *a*, come complemento *b* ed $\Re$ come predicato, scriviamo $a \Re b$ e diremo sinteticamente che a è in relazione con b.

Esempio 2

Con riferimento all'esempio 1 si ha:
A = {3,5,6,9,30} $\Re$: "essere multiplo di"
allora scriviamo:
per qualunque *a* e *b* appartenenti ad *A*, $a \Re b$ se e solo se *a* è multiplo di *b*
in particolare:
$30 \Re 6$; $9 \Re 3$; $30 \Re 3$; $6 \Re 3$; $30 \Re 5$; $3 \Re 3$; $5 \Re 5$; $6 \Re 6$; $9 \Re 9$; $30 \Re 30$
Abbiamo così formato un insieme di **coppie ordinate** di elementi tra loro in relazione: $30 \Re 5$ può anche essere indicata con (30;5).

DEFINIZIONE. Chiamiamo **insieme della relazione** (in simboli **G**$_R$) l' insieme delle coppie ordinate i cui elementi sono gli argomenti del predicato binario, ossia sono in relazione tra di loro. Esso risulta essere un **sottoinsieme** del prodotto cartesiano dell'insieme A con se stesso. Si rappresenta per proprietà caratteristica nel seguente modo $G_R = \{(a,b) \in A \times A / a \Re b\}$.

119 Nell'insieme A rappresentato con un diagramma di Eulero-Venn introduciamo il predicato $\Re$: "avere una sola lettera diversa". Costruisci l'insieme **G**$_R$.



Traccia di soluzione:
per costruire l'insieme **G**$_R$ devo formare le coppie ordinate ricordando che per qualunque *a* e *b* appartenenti ad *A*, $a \Re b$ se e solo se "*a* ha una sola lettera diversa da *b*", ad esempio prete $\Re$ prese .

Le altre coppie di parole in relazione sono: ……………… ……………… ……………... …...........

…………… …………… ……………… ……………… ……………… ……………… …............

…………… …………… ……………… ……………… ……………… ……………… …............

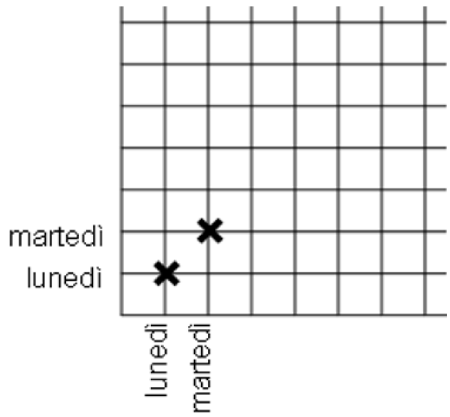
120 Nell'insieme *C*={Como, Milano, Venezia, Parma, Brescia, Aosta, Torino, Genova, Imperia, Arezzo, Firenze, Grosseto, Napoli, Campobasso, Catanzaro, Bologna, Vercelli, Salerno} è introdotta la relazione $\Re$: "essere nella stessa regione". Costruisci l'insieme **G**$_R$.

121 Nell'insieme *S*={x / x è il nome di un giorno della settimana}è introdotta la relazione $\Re : x \in S, y \in S, x \Re y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Costruisci l'insieme **G**$_R$.

122 Nell'insieme *F*={1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2} è introdotta la relazione $\Re$ "essere consecutivi". Costruisci l'insieme **G**$_R$.

► 3. Rappresentazioni di una relazione

Grafico di una relazione



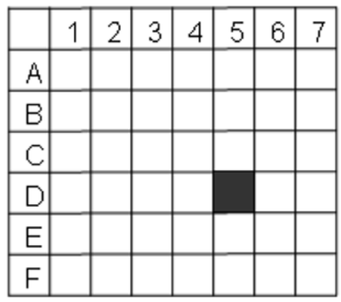
123 Considera l'insieme S = {x / x è il nome di un giorno della settimana}, completa la rappresentazione grafica dell'insieme S x S , evidenzia poi con una crocetta gli elementi dell’insieme $\mathbf{G}_R$ determinato dalla relazione “x ha lo stesso numero di sillabe di y”.

124 Considera l’insieme F={1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2}; fai la rappresentazione grafica dell'insieme F x F e metti in evidenza con una crocetta gli elementi dell’insieme $\mathbf{G}_R$ determinato dalla relazione “essere consecutivi”.

Dal momento che una relazione in un insieme Y determina un sottoinsieme del prodotto cartesiano Y x Y è comodo rappresentare una relazione nello stesso diagramma usato per rappresentare il prodotto cartesiano.

Una relazione può quindi essere rappresentata attraverso un grafico cartesiano.

Matrice o tabella di una relazione



Nella figura sottostante è rappresentata la classica griglia per il gioco della battaglia navale. Ogni cella è individuata da una coppia ordinata il cui primo elemento (una lettera dell’alfabeto), indica la riga, il secondo (un numero) indica la colonna; così la coppia (D,5) indica la cella annerita.

125 Considera nell'insieme A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10} la relazione $\Re : x\in A ,\ y\in A ,\ x \Re y$ se e solo se “x è concorde con y”. Costruiamo una tabella a doppia entrata riportando in orizzontale e in verticale gli elementi dell'insieme A.

Fissa l'attenzione su una cella e segui le istruzioni:

se $a \Re b$

metti 1 nella cella (a,b)

altrimenti

metti 0 nella cella (a,b)

	-1	+3	-7	+5	-2	+4	+10
-1	1						
+3							
-7							
+5			0				
-2							
+4							
+10							

Prosegui tu seguendo l’esempio.

Alla fine tutte le celle sono riempite: compare zero se gli elementi della coppia ordinata non sono in relazione, compare 1 al contrario. La relazione $\Re$ è completamente rappresentata. La tabella costruita si chiama **matrice della relazione**.
Una relazione può sempre essere rappresentata attraverso una matrice.

126 Nell’insieme S={x / x è il nome di un giorno della settimana}è introdotta la relazione $\Re : x\in S ,\ y\in S ,\ x \Re y$ se e solo se “x ha lo stesso numero di sillabe di y”. Rappresenta la relazione con una mastrice.

127 Assegnato il predicato $\Re$ “essere divisibile per” introdotto nell’insieme A = {12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60}, rappresenta con una matrice la relazione $\Re$.

Grafo di una relazione

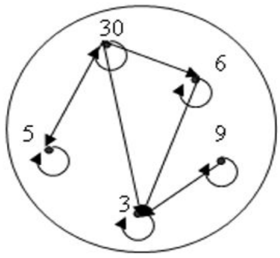
DEFINIZIONE. Un **grafo** è un insieme di punti detti nodi e di archi che uniscono coppie di punti.

Abbiamo visto che con un predicato si possono formare alcune proposizioni aventi rispettivamente come soggetto e come complemento elementi di un insieme: solo le proposizioni vere determinano la relazione tra gli elementi di quell'insieme e generano coppie di elementi in relazione.

Esempio

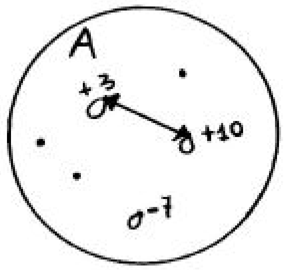
Nel diagramma di Eulero-Venn dell'insieme A={3, 5, 6, 9, 30} rappresentiamo la relazione R = “essere multiplo di “ collegando mediante una freccia gli argomenti delle proposizione vere.

Come puoi osservare l'elemento 30 è collegato con una **freccia** all'elemento 6 in quanto la proposizione: "30 è multiplo di 6" è vera, ma non all'elemento 9 poiché la proposizione: "30 è multiplo di 9" è falsa; inoltre la punta della freccia è sul numero 6 in quanto complemento del predicato "essere multiplo"; infine su ciascun elemento abbiamo messo un **anello o cappio** per indicare che ogni elemento è in relazione con se stesso essendo vera per ogni elemento a dell'insieme A la proposizione: "a è multiplo di a".



128 Completa la rappresentazione con frecce della relazione $\Re : x \in A, y \in A, x \Re y$ se e solo se “x è concorde con y” nell'insieme A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10}.

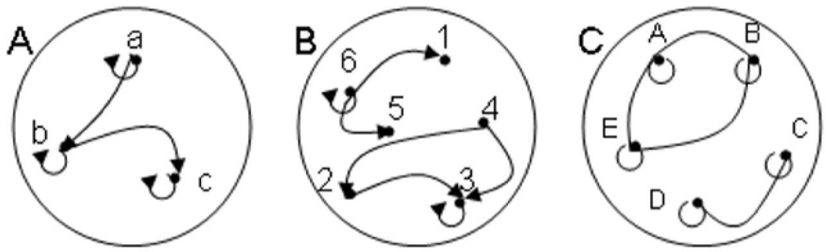
Nel completare il disegno dell'esercizio precedente hai dovuto utilizzare una freccia con due punte, infatti le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Quando si ha questo caso si può omettere la punta della freccia utilizzando un **arco** che collega gli argomenti del predicato.



Una relazione può essere rappresentata attraverso un grafo.

129 Nell’insieme A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} è introdotto il predicato *R*: “essere il doppio “; costruisci l’insieme $\mathbf{G}_R$, rappresenta la relazione nei tre modi descritti sopra: con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo.

130 Sono assegnati i grafi di tre relazioni R_1, R_2, R_3 introdotte in altrettanti insiemi *A, B, C* ; deduci da essi gli elementi di ciascun insieme e costruisci per ciascuna relazione l'insieme $\mathbf{G}_R$



131 Rappresenta nei tre modi che sono stati descritti (con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo) la relazione *R:* “essere nati nello stesso mese” introdotta nell’insieme *C* degli alunni della tua classe.

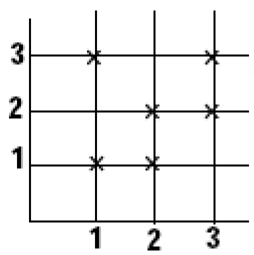
132 Nell’insieme $H = \{x \in \mathbb{N} / 21 < x < 40\}$, $x \Re y$ se e solo se "la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y". Costruisci $\mathbf{G}_R$ e rappresenta la relazione con una matrice.

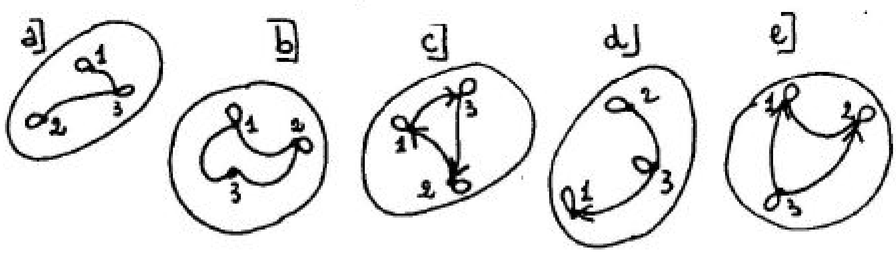
Scegli la risposta corretta:

133 Una relazione ***R*** introdotta in un insieme A determina:

[A] un sottoinsieme di A [B] l’insieme $A \times A$ [C] un insieme di coppie
[D] un grafico cartesiano [E] un sottoinsieme di $A \times A$

134 La relazione ***R*** rappresentata nel grafico cartesiano, quale grafo ha?





► 4. Formalizzazione di problemi attraverso una relazione

Problema 1

Nella scuola musicale G. Verdi, al termine di ogni anno di corso, si tiene un saggio finale. Nella matrice sottostante è rappresentata la relazione R: "suonare lo stesso strumento" introdotta nell'insieme degli iscritti alla 1° A. Quale proposizione è vera? Perché?

[A] l'alunno b suona lo stesso strumento di f
[B] la classe 1ª A è formata da 36 alunni
[C] gli alunni c,e,d, suonano lo stesso strumento

L'alunno f suona il violino: con quale compagno della classe segue la lezione?
Per quanti strumenti musicali è stato composto il brano musicale che la classe 1°A suonerà al saggio finale?

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0
c	0	0	1	1	1	0
d	0	0	1	1	1	0
e	0	0	1	1	1	0
f	0	0	0	0	0	1

Problema 2

Hai a disposizione alcune tessere come quella di seguito disegnata  *e due simboli* ♥ *e* ♠ *con cui puoi riempire le sue caselle.*
1) Quante tessere diverse puoi realizzare?
2) Si vuole colorare in modo diverso le tessere che hanno il carattere posto al centro uguale; quanti colori occorrono?

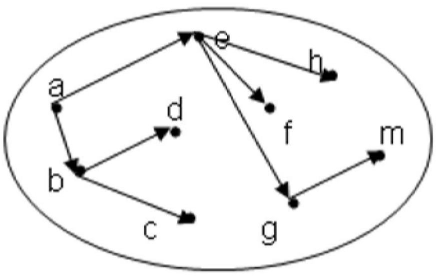
Traccia della soluzione
Comincia a formare le tessere disegnando nelle caselle i due simboli stabiliti come nell'esempio

♥	♠	♥
♠	♠	♥

Considera l'insieme delle tessere disegnate e rappresenta con il grafo sagittale la relazione *R*: "avere il carattere centrale uguale". Possiamo colorare dello stesso colore le tessere che non sono tra loro in relazione. Occorrono quindi … … colori.

Problema 3

Il grafo sagittale rappresenta la relazione R: "essere padre" che sussiste tra i componenti maschi della famiglia Rossi. Chi sono i fratelli? chi è figlio unico? a *è il nonno di chi?* m *quanti zii ha?*

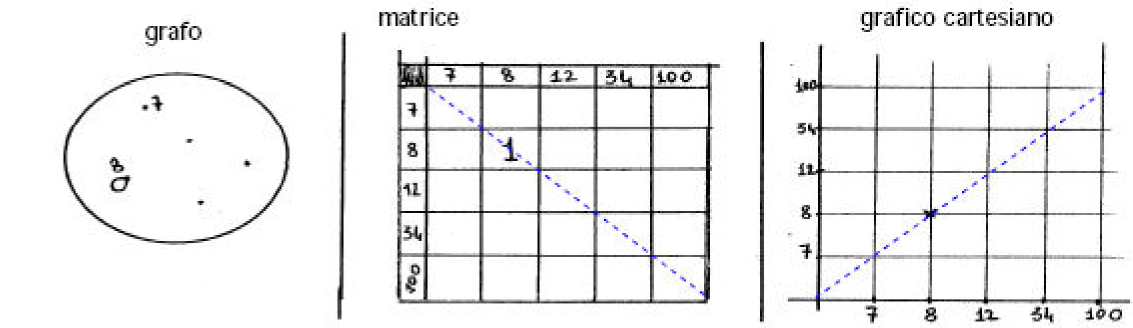


► 5. Proprietà di una relazione

Proprietà riflessiva

Esempio 4

Nell'insieme T = {7, 8, 12, 34, 100} è introdotta la relazione R: " essere divisore".
Completa le tre rappresentazioni:



Su ogni elemento del diagramma di Venn hai dovuto mettere il cappio poiché ogni elemento dell'insieme è divisore di se stesso.
Nelle caselle della matrice che costituiscono la diagonale discendente compaiono degli 1 e nel grafico cartesiano ci sono evidenziati gli incroci sulla diagonale ascendente dello schema.

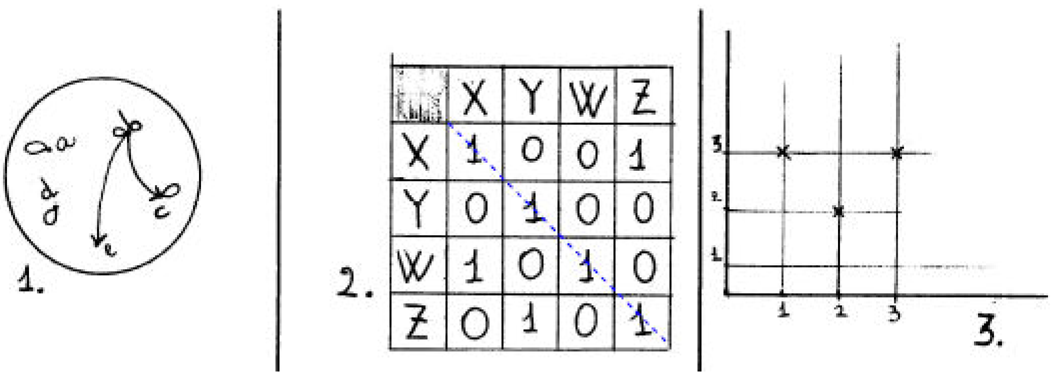
DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ in un insieme A gode della **proprietà riflessiva** quando ogni elemento è in relazione con se stesso, ossia **per qualunque *x* dell'insieme *A* si ha** $x \Re x$.

135 Indica quale tra le seguenti relazioni è riflessiva

Insieme	relazione	è riflessiva?
Numeri naturali	essere divisibile	[SI] [NO]
Libri che hai in cartella	avere lo stesso numero di pagine	[SI] [NO]
Rette del piano	essere perpendicolari	[SI] [NO]
Poligoni	avere lo stesso numero di lati	[SI] [NO]
Città della Lombardia	terminare con la stessa vocale	[SI] [NO]

Osserva che nell'insieme *N* dei numeri naturali la relazione "essere divisibile" non è riflessiva poiché zero non è divisibile per se stesso.

136 Quale delle seguenti relazioni è riflessiva?

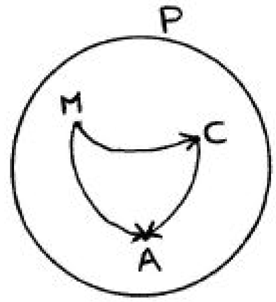


Il caso 1 non rappresenta una relazione riflessiva in quanto il grafo mette in evidenza che non tutti gli elementi sono in relazione con se stessi; così il grafico cartesiano del caso 3 ci permette di concludere che la relazione tra gli elementi dell'insieme {1,2,3} non gode della proprietà riflessiva in quanto non è stata evidenziata la coppia (1;1). Il caso 2, invece, ci segnala la proprietà riflessiva della relazione attraverso la presenza degli uno nella diagonale discendente della matrice.

Proprietà antiriflessiva

Esempio 5

E' dato il grafo della relazione *R*: " essere più alto", introdotta nell'insieme delle persone P = {Marco, Antonio, Carlo}; rappresenta la relazione con la matrice e col grafico cartesiano.
Nel grafo non si può mettere il cappio su alcun elemento dell'insieme, nella diagonale discendente della matrice non hai messo alcun 1, sulla diagonale del grafico cartesiano non compare alcuna crocetta.
La proposizione "x è più alto di x" è sempre falsa qualunque sia l'elemento considerato nell'insieme.

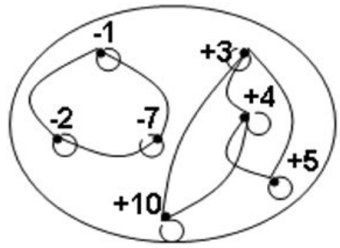


DEFINIZIONE. Una relazione *R* in un insieme *A* gode della **proprietà antiriflessiva** quando nessun elemento è in relazione con se stesso, ossia **per nessun elemento *x* di *A* si ha** $x \Re x$.

Proprietà simmetrica

Esempio 6

Nel grafo è rappresentata la relazione *R*: "essere concorde" nell'insieme dei numeri A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10}; per collegare elementi in relazione abbiamo usato archi poiché, ad esempio, le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere.



DEFINIZIONE. Una relazione *R* introdotta in un insieme *A* gode della **proprietà simmetrica** quando risultano vere le due proposizioni che si ottengono scambiando soggetto e predicato; ossia **per qualunque *x* e *y* appartenenti all'insieme *A* si ha** $x \Re y$ **e** $y \Re x$ **.**

137 Riprendi la matrice e costruisci il grafico cartesiano della relazione *R*: "essere concorde" nell'insieme dei numeri A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10}.
Cosa noti nella matrice?
Come sono disposte le crocette nel grafico cartesiano?

Avrai notato che tracciando la diagonale discendente nella matrice, essa viene divisa in due parti identiche: piegando la matrice lungo la diagonale medesima ogni casella contenente 0 (zero) si sovrappone ad una casella contenente 0 ed una casella contenente 1 (uno) va a ricoprirne una casella occupata da un 1. Diremo quindi che gli 1 e gli 0 sono disposti in modo simmetrico rispetto alla diagonale discendente. In modo analogo, nel grafico cartesiano: i punti che indicano elementi in relazione sono disposti simmetricamente rispetto alla diagonale del grafico.

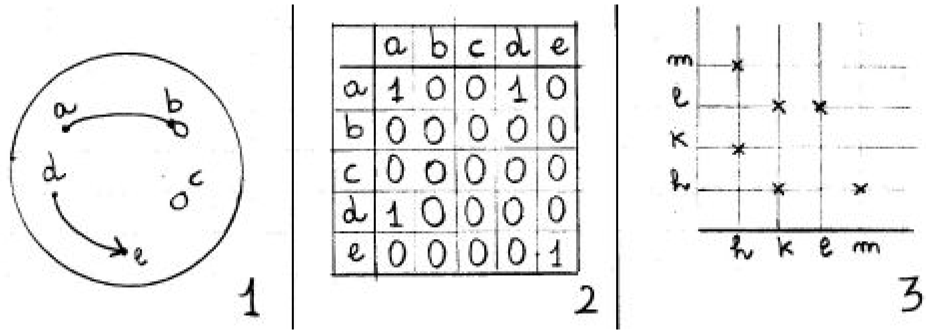
138 Riconosci le relazioni simmetriche:

Insieme	relazione	è simmetrica?	
Città d'Italia	appartenere alla stessa regione	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere perpendicolari	[SI]	[NO]
Solidi	avere lo stesso volume	[SI]	[NO]
Fiumi d'Europa	essere affluente	[SI]	[NO]
Numeri interi	essere il quadrato di	[SI]	[NO]

Le relazioni degli ultimi due casi non godono della proprietà simmetrica. Infatti:

- la proposizione "La Mosella è un affluente del Reno" è vera, ma non lo è la proposizione che da essa si ottiene scambiando il soggetto con il predicato;
- se un numero intero è il quadrato di un altro (ad esempio +25 è il quadrato di +5), non è vero che +5 è il quadrato di +25.

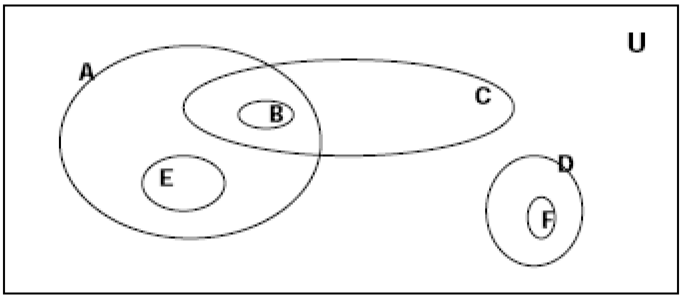
139 Quale delle seguenti relazioni è simmetrica? [1] [2] [3]



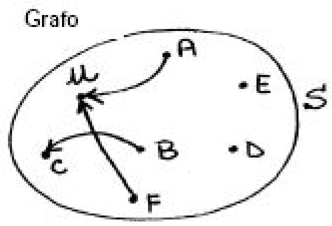
Proprietà antisimmetrica

<u>Esempio</u>

Il diagramma di Venn in figura rappresenta un insieme U e alcuni suoi sottoinsiemi.



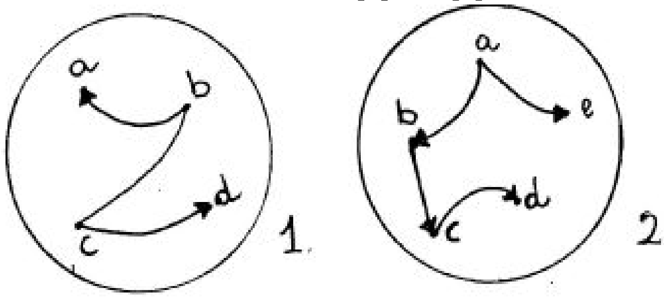
Consideriamo ora l'insieme di insiemi S = {U, A, B, C, D, E, F} e la relazione *R*: "essere sottoinsieme proprio di"; completa il grafo della relazione:



Certamente nel completare il grafo non avrai usato archi: è evidente che le proposizioni "B è sottoinsieme proprio di C" e "C è sottoinsieme proprio di B" non possono essere entrambe vere. Anzi, la verità della prima implica necessariamente la falsità della seconda.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ introdotta in un insieme *A* gode della **proprietà antisimmetrica** quando non possono essere vere contemporaneamente le proposizioni che si ottengono scambiando il soggetto con il complemento, se soggetto e complemento sono diversi tra loro; ossia **per qualunque *x* e *y* dell'insieme *A* se** $x \neq y$ **e** $x \Re y$ **non è vero che** $y \Re x$ **.**

140 Quale delle seguenti relazioni è antisimmetrica? [1] [2]

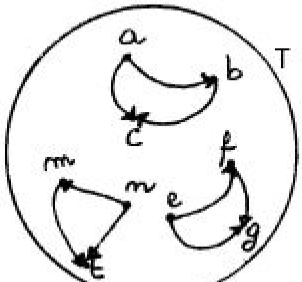


Il grafo 1 indica che la relazione non è antisimmetrica poiché, pur essendo b≠c si ha bRc e cRb (i due elementi b e c sono collegati da un arco); le proposizioni vere che si possono formare dall'analisi del grafo 2 non rimangono vere se si scambia il soggetto con il complemento (nel grafo gli elementi sono collegati solo con frecce): in esso è pertanto rappresentata una relazione antisimmetrica.

Proprietà transitiva

Esempio

Nel grafo sottostante è rappresentata una relazione ***R*** introdotta in un insieme T:



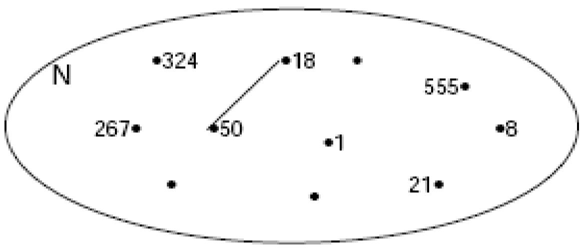
Dall'analisi della situazione rappresentata possiamo affermare che dalla verità di (a*R*b **e** b*R*c) segue la verità di a*R*c.
Analizzando gli altri elementi e la relazione *R*, possiamo osservare che essendo vera (e*R*f **e** f*R*g) è vera anche e*R*g; inoltre si ha che essendo vera (n*R*m **e** m*R*t) è vera anche n*R*t.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ introdotta in un insieme *A* gode della **proprietà transitiva** quando se $a \Re b$ e $b \Re c$ allora risulta anche $a \Re c$, con a, b, c elementi qualsiasi dell'insieme *A*.

Dal grafo di una relazione transitiva puoi osservare che le terne di elementi in relazione costituiscono i vertici di un triangolo; non è facile invece individuare la proprietà transitiva dalle altre rappresentazioni grafiche.

141 Verifica se, nell'insieme *N* dei numeri naturali, la relazione *R*: "avere lo stesso numero di cifre" gode della proprietà transitiva.

Osserva che non è possibile rappresentare completamente il grafo della relazione; tuttavia, in un diagramma di Eulero-Venn, segniamo alcuni numeri naturali che ci aiutino a raggiungere l'obiettivo:



Completa il grafo e le proposizioni:

da	18 *R* 50	e	50 *R* …	segue	… *R* ...
da	… *R* 555	e	... *R* 267	segue	… *R* ...

Presi tre numeri naturali x, y, z, se x ha lo stesso numero di cifre di y e y ha lo stesso numero di cifre di z è sempre vera la proposizione "x ha lo stesso numero di cifre di z"? ………
Puoi concludere che la relazione assegnata gode della proprietà transitiva? ……………

142 Indica quale tra le seguenti relazioni è transitiva:

Insieme	relazione	è transitiva?
numeri naturali	essere multiplo	[SI] [NO]
regioni d'Italia	essere più a nord	[SI] [NO]
numeri interi	essere minore	[SI] [NO]
rette del piano	essere perpendicolari	[SI] [NO]
persone	essere padre di	[SI] [NO]
stati d'Europa	confinare con	[SI] [NO]

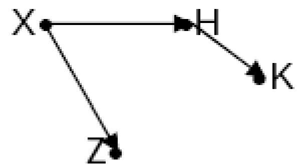
143 Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme $H=\{x\in\mathbb{N}/0\leqslant x\leqslant 12\}$; determina il resto della divisione di ciascun numero di H con 4, compila la tabella come suggerito nell'esempio:

operazione	0:4	1:4	2:4										12:4
resto	0	1											0

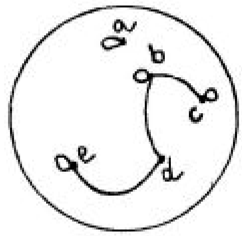
Introduciamo in H la relazione $x\Re y$ se e solo se "x e y hanno lo stesso resto nella divisione per 4". Costruisci il grafo della relazione e stabilisci se gode della proprietà transitiva.

La stessa relazione $\Re$ introdotta nell'insieme dei numeri naturali N è una relazione transitiva?

144 Completa il grafo in modo che la relazione rappresentata diventi transitiva:



145 La relazione R, di cui è assegnato il grafo, è:
[A] non riflessiva e transitiva [B] simmetrica e riflessiva [C] transitiva
[D] simmetrica e non riflessiva [E] solo riflessiva

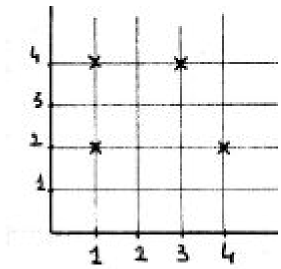


146 Quale proposizione è falsa?
[A] se una relazione è simmetrica, all'insieme $\mathbf{G}_R$ appartengono le coppie del tipo (a,b) e (b,a).
[B] il grafico cartesiano è un modo per rappresentare una relazione.
[C] la matrice di una relazione riflessiva presenta tutti uno sulla diagonale discendente.
[D] la matrice di una relazione antiriflessiva non presenta alcun uno sulla diagonale discendente.
[E] se una relazione è transitiva, allora è anche simmetrica.

147 Nell'insieme dei numeri naturali N quale delle seguenti relazioni è riflessiva?
[A] avere lo stesso numero di cifre [B] essere primo con [C] essere minore di
[D] essere divisibile [E] essere divisore

148 La relazione *R*:"essere multiplo" introdotta nell'insieme $A=\{x\in\mathbb{N}\,1\leqslant x\leqslant 5\}$ è:
[A] riflessiva e transitiva [B] solo riflessiva [C] simmetrica e transitiva
[D] riflessiva, simmetrica, transitiva [E] solo transitiva

149 Relativamente a una qualsiasi relazione *R*, quale proposizione è falsa?
[A] se $(x,y)\in G_R$ e $(y,z)\in G_R$ qualche volta si ha $(x,z)\in G_R$
[B] se $(x,y)\in G_R$ si ha sempre $(y,x)\in G_R$
[C] una relazione riflessiva presenta nel suo grafo il cappio su ciascun elemento
[D] una relazione binaria è individuata da un predicato che lega due argomenti dell'insieme A
[E] una relazione binaria genera un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A\times A$

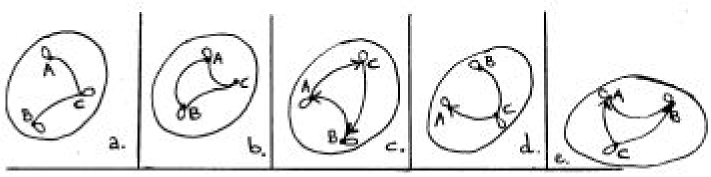


150 Con riferimento al grafico cartesiano disegnato di lato, quale proposizione è vera?
[A] nel suo grafo almeno un elemento non presenta il cappio
[B] la relazione è antisimmetrica
[C] la relazione è transitiva
[D] l'insieme G_R è costituito dalle coppie (1,2) (1,4) (3,4) (4,2)
[E] la relazione gode della proprietà simmetrica e riflessiva

151 La relazione R: "avere lo stesso numero di lati", introdotta nell'insieme dei poligoni del piano è
[A] solo riflessiva [B] riflessiva, simmetrica e transitiva
[C] antisimmetrica [D] non gode di nessuna proprietà
[E] non può essere considerata una relazione

152 Quale grafo a destra equivale alla matrice della relazione rappresentata a sinistra?

	A	B	C
A	1	0	1
B	1	1	0
C	0	1	1



[a.] [b.] [c.] [d.] [e.]

► 6. Relazioni di equivalenza

Esempio

Completa la tabella segnando le proprietà di cui gode ciascuna relazione indicata (Ri= riflessiva, Si=simmetrica, Tr=transitiva).

	relazione	insieme	
a)	Avere lo stesso perimetro	poligoni	[Ri] [Si] [Tr]
b)	Essere fratello di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
c)	Essere figlio di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
d)	Essere più alto di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
e)	Avere gli angoli rispettivamente congruenti	triangoli	[Ri] [Si] [Tr]
f)	Iniziare con la stessa lettera	parole	[Ri] [Si] [Tr]
g)	Giocare nella stessa squadra	calciatori	[Ri] [Si] [Tr]
h)	$(a,b)\Re(x,y)$ se e solo se a+b=x+y	N x N	[Ri] [Si] [Tr]

Svolgimento

La relazione a) gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; infatti

- "il poligono p ha lo stesso perimetro di se stesso" è vera per qualunque poligono (proprietà Riflessiva);
- "il poligono p_1 ha lo stesso perimetro del poligono p_2" implica la verità della proposizione "il poligono p_2 ha lo stesso perimetro di p_1", qualunque siano i due poligoni p_1 e p_2 (proprietà Simmetrica);
- se "il poligono p_1 ha lo stesso perimetro di p_2" e "p_2 ha lo stesso perimetro di p_3" allora si ha anche che "p_1 ha lo stesso perimetro di p_3", qualunque siano i poligoni p_1, p_2, p_3 (proprietà Transitiva).

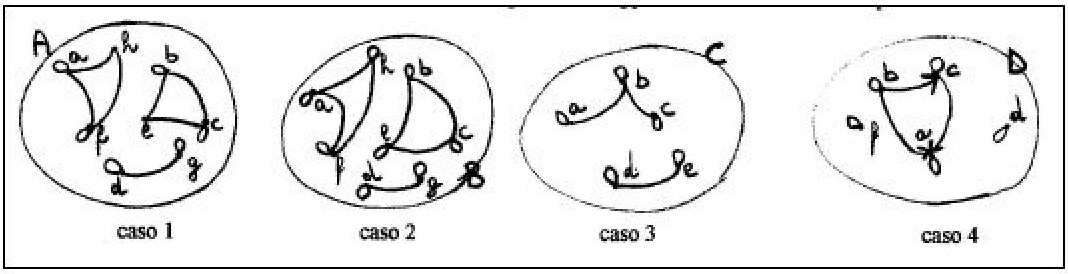
Verifica tu se anche le altre relazioni godono delle tre proprietà **R**iflessiva, **S**immetrica, **T**ransitiva, come "essere fratello di", "avere gli angoli rispettivamente uguali", "iniziare con la stessa lettera".

DEFINIZIONE. Chiamiamo **relazione d'equivalenza** la relazione che gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

153 Completa la tabella seguente dopo aver riesaminato le relazioni considerate nelle varie attività che hai affrontato:

	relazione	insieme	è d'equivalenza?	
a)	essere multiplo	numeri naturali	[SI]	[NO]
b)	avere lo stesso numero di sillabe	parole italiane	[SI]	[NO]
c)	essere minore	interi relativi	[SI]	[NO]
d)	vincere	squadre di calcio	[SI]	[NO]
e)	avere lo stesso numero di angoli	poligoni	[SI]	[NO]
f)	essere il plurale	parole italiane	[SI]	[NO]
g)	essere il cubo	numeri italiani	[SI]	[NO]

154 Analizza i seguenti grafi e individua quello che rappresenta una relazione d'equivalenza:

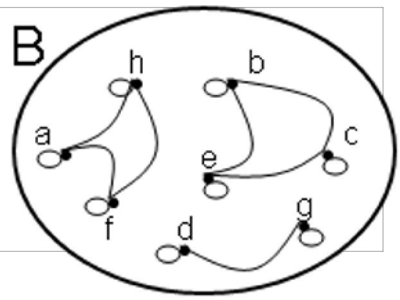


Traccia di soluzione:
Completa le proposizioni:

- Nel caso 1 non è rappresentata una relazione d'equivalenza perché ....
- Nel caso 2 la presenza del cappio su ciascun elemento indica che la relazione gode della proprietà ...., il fatto che coppie di elementi siano collegate da archi indica che vale la proprietà ...., infine terne di elementi sono vertici di .... e quindi la relazione gode della proprietà .... In conclusione ....
- La relazione del caso 3 non gode della proprietà ……………………… pertanto ....
- Nel caso 4 sussistono le proprietà .... e ...., ma non la proprietà .... ……….......... pertanto la relazione ....

Esempio

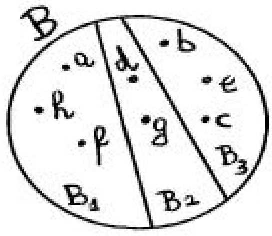
Dato l'insieme B = {a, b, c, d, e, f, g, h} costruiamo alcuni suoi sottoinsiemi seguendo le istruzioni:
ripeti
scegliamo a caso un elemento di B;
formiamo un sottoinsieme contenente l'elemento scelto e tutti gli altri che con quello sono in relazione;
***finché** non abbiamo esaurito tutti gli elementi.*



Svolgimento

- Scegliamo l'elemento *a*, formiamo il sottoinsieme avente come elementi *a*, *h*, *f* che con a sono in relazione: $B_1 = \{a, h, f\}$.

Gli elementi dell'insieme B non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti.



- Scegliamo *g* e formiamo il sottoinsieme B_2 avente come elementi *g* e *d*, l'unico che con esso è in relazione: $B_2 = \{g, d\}$.
  Gli elementi dell'insieme *B* non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti.
- Scegliamo *c* e formiamo il sottoinsieme B_3 avente come elementi *c, e, b* che con esso sono in relazione: $B_3 = \{c, e, b\}$.

Abbiamo esaurito gli elementi dell'insieme assegnato.

Abbiamo così ottenuto tre sottoinsiemi dell'insieme B, che hanno queste particolari caratteristiche

- nessuno è vuoto,
- a due a due sono disgiunti,
- la loro unione è l'insieme B.

Premettiamo le definizioni:

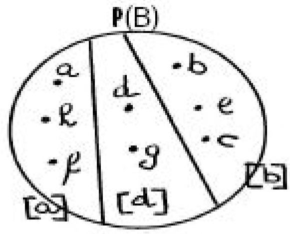
DEFINIZIONE. Determinare una **partizione di un insieme X** significa suddividere l'insieme stesso in un numero finito di sottoinsiemi X_1, X_2, X_3, ……… X_n , detti **classi**, tali che

1) nessun sottoinsieme è vuoto,
2) a due a due sono disgiunti,
3) la loro unione è l'insieme X.

La partizione di X è l'insieme i cui elementi sono le classi X_1, X_2, X_3, ……… X_n , e viene indicato con $P(X) = \{X_1, X_2, X_3, \dots X_n\}$.

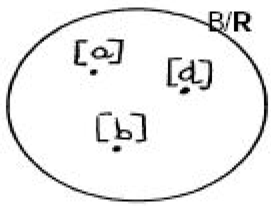
DEFINIZIONE. Quando in un insieme *A* è stata introdotta una relazione d'equivalenza, si chiama **classe d'equivalenza** ogni sottoinsieme di *A* contenente tutti e soli gli elementi tra loro in relazione. Si viene così a determinare **una partizione dell'insieme *A* in classi d'equivalenza** ciascuna indicata racchiudendo in parentesi quadrate un suo qualunque elemento.

Nell'esempio sopra riportato le classi d'equivalenza sono i sottoinsiemi di B indicati con [a] , [b] , [c] ; la partizione dell'insieme *B* in classi d'equivalenza è rappresentata con il diagramma di Eulero-Venn a fianco disegnato.



DEFINIZIONE. Si chiama **insieme quoziente** di un insieme *A* rispetto a una relazione di equivalenza *R*, l'insieme i cui elementi sono le classi d'equivalenza determinate dalla relazione *R*. L'insieme quoziente si indica con il simbolo *A/R*.

Nel caso dell'esempio 10 si passa all'insieme quoziente B/*R*, rappresentato col seguente diagramma di Eulero-Venn:



Ogni volta che si ha una relazione d'equivalenza R in un insieme A, possiamo stabilire la seguente catena di passaggi :

insieme A → partizione P(A) → insieme quoziente A/R

155 Fissa l'attenzione sulla relazione *R*:" frequentare la stessa classe" introdotta nell'insieme *S* degli alunni iscritti nella tua scuola.
Verifica che *R* è una relazione d'equivalenza. Costruisci le classi d'equivalenza. Quante ne hai potuto formare? Come sono indicate nella realtà che vivi quotidianamente?Determina la partizione **P**(S) in classi d'equivalenza e infine l'insieme quoziente *S/R* .

156 Considera i tre simboli: £, $, %; dopo aver formato tutte le possibili tessere di tre caselle segnate con quei simboli, senza ripetizioni, introduci nell'insieme *T* delle tessere ottenute la relazione *R*: "avere uguale il primo simbolo di sinistra"; verifica se è una relazione d'equivalenza; costruisci la partizione di **P**(T) in classi d'equivalenza e forma l'insieme quoziente *T/R*.
Traccia di soluzione
Alcune tessere dell'insieme T sono:

£	$	%
%	$	£

Ecc.

157 Studia in *N* la relazione *R*: "avere la stessa cifra delle unità". Verifica se è una relazione d'equivalenza, costruisci l'insieme quoziente dopo aver risposto alle seguenti domande:
- Quanti numeri naturali sono tra loro equivalenti?
- Da quanti elementi è costituito l'insieme *N/R*?
- Qual è l'elemento che sceglieresti come rappresentante di ciascuna classe?

158 Considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per due" introdotta nell'insieme N e studiane le proprietà.
- E' una relazione d'equivalenza? Se la risposta è affermativa, costruisci l'insieme quoziente *N/R*.
- Quante classi d'equivalenza hai formato?
- Puoi sfruttare quanto ottenuto per enunciare le definizioni di numero pari e di numero dispari?
- Giustifica, in base allo svolgimento dell'esercizio, l'affermazione: "L'insieme dei numeri pari è il complementare in N dell'insieme dei numeri dispari"?

159 Considera l'insieme $A=\{x\in\mathbb{N}/1\leq x\leq 20\}$ e i suoi sottoinsiemi

$A_1 = \{1, 5, 9, 13, 17\}$; $A_2 = \{2, 6, 10, 14, 18\}$; $A_3 = \{3, 7, 11, 15, 19\}$; $A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
1. Rappresenta gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn.
2. Si può affermare che quei sottoinsiemi determinano una partizione dell'insieme A?
3. È vero che a ciascuno dei suddetti sottoinsiemi appartengono i numeri di A aventi lo stesso resto nella divisione per 4?
4. Quei sottoinsiemi sono dunque classi d'equivalenza? Qual è il predicato della relazione che le determina?

160 Nell'insieme *N* dei numeri naturali stabilisci se è d'equivalenza la relazione *R*: "x *R* y se e solo se x ha le stesse cifre di y".

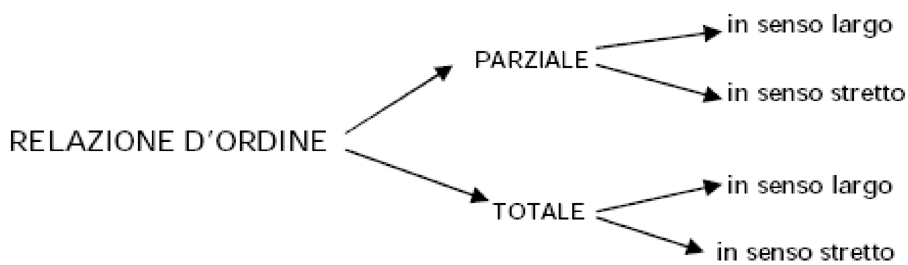
161 Nell'insieme *C* degli alunni della tua classe verifica se la relazione *R*: "x *R* y se e solo se il cognome di *x* ha la stessa lettera iniziale del cognome di *y*" è d'equivalenza; determina in caso affermativo la partizione dell'insieme *C* e l'insieme quoziente C/*R*.

►7. Relazioni di ordine

Nel linguaggio di ogni giorno avrai certamente spesso usato espressioni come "devo mettere in ordine i miei libri" oppure "qui non c'è ordine" e altre espressioni simili.
Anche in matematica, fin dalla scuola elementare, hai imparato a ordinare gli elementi dell'insieme dei numeri naturali: dati due numeri naturali hai imparato infatti a stabilire quale dei due è il maggiore.

DEFINIZIONE. Una relazione $\mathfrak{R}$, introdotta in un insieme *A*, si chiama **relazione d'ordine** se è antisimmetrica e transitiva.

Riguardando le varie relazioni introdotte sin qui, possiamo stabilire che esistono relazioni d'ordine di vario tipo, schematizzate nel seguente diagramma:

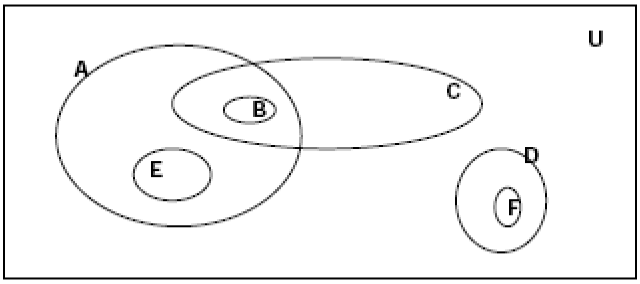


Attraverso alcuni esempi, vogliamo chiarire le differenze tra i diversi tipi; a questo scopo introduciamo la

DEFINIZIONE. Data una relazione $\mathfrak{R}$ d'ordine in un insieme *A*, **due elementi distinti** *x* e *y* sono **confrontabili** se rispetto ad $\mathfrak{R}$ se si ha $x\mathfrak{R}y$ oppure $y\mathfrak{R}x$.

Esempio

In base al diagramma il diagramma di Eulero-Venn di seguito riportato introduciamo nell'insieme S = {U, A, B, C, D, E, F}la relazione *R*: "essere sottoinsieme di".



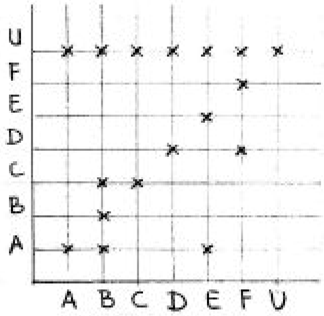
Ricordiamo che, dati due insiemi *X* e *Y*, *X* è sottoinsieme di *Y* quando ogni elemento di *X* appartiene a *Y* ; in simboli $X \subseteq Y$ e si legge X è contenuto in Y o X è uguale a Y.

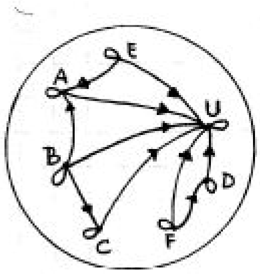
Vogliamo studiare le proprietà della relazione *R*.

1. Poiché ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, possiamo dire che *R* è riflessiva.
2. Se $X \subseteq Y$ e $X \neq Y$ allora $Y \not\subset X$; allora *R* è una relazione antisimmetrica.
3. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$; allora *R* è una relazione transitiva.

Per il nostro esempio la relazione è così rappresentabile:

	A	B	C	D	E	F	U
A	1	0	0	0	0	0	1
B	1	1	1	0	0	0	1
C	0	0	1	0	0	0	1
D	0	0	0	1	0	0	1
E	1	0	0	0	1	0	1
F	0	0	0	1	0	1	1
U	0	0	0	0	0	0	1





Da ogni rappresentazione si evidenziano le proprietà suddette. Inoltre si mette chiaramente in evidenza che esistono almeno due elementi dell'insieme S che non sono in alcun modo in relazione: ad esempio $A \not\subset D$ e $D \not\subset A$, ossia A e D non sono confrontabili.

Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine parziale (si dice parziale perché almeno due elementi non sono confrontabili), **in senso largo** (perché la relazione gode anche della proprietà riflessiva).

162 Riprendiamo il diagramma di Eulero-Venn dell'esempio precedente e introduciamo nell'insieme S = {U, A, B, C, D, E, F}la relazione *R*: "essere sottoinsieme proprio di". Studiamo le proprietà di questa relazione.

Rappresenta la relazione con la matrice:

	A	B	C	D	E	F	U
A							
B							
C							
D							
E							
F							
U							

Cosa è cambiato rispetto alla relazione precedente?

… … … … … … … … … … … … …

Sono ancora valide le proprietà antisimmetrica e transitiva?

… … … … … … … … … … … … …

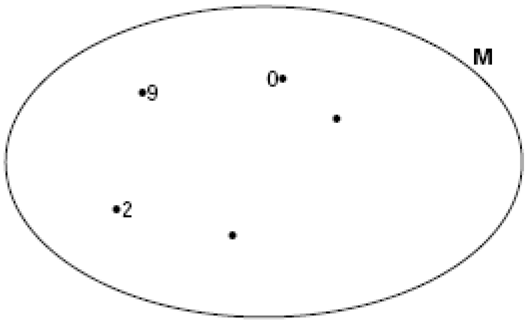
Esistono elementi di S non confrontabili?

… … … … … … … … … … … … ...

Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine parziale (esistono almeno due elementi che non sono confrontabili), **in senso stretto** (la relazione gode della proprietà antiriflessiva**).**

RELAZIONE D'ORDINE
proprietà
antisimmetrica
transitiva
→ PARZIALE
Esistono almeno due
elementi non confrontabili
→ in senso largo:
proprietà riflessiva
→ in senso stretto:
proprietà antiriflessiva

163 Nell'insieme M = {1,8,3,4,10,2,7,0,5,9,6} viene introdotta la relazione *R* così definita: "x*R*y se e solo se y –x appartiene a N".
Costruisci il grafo della relazione, completando il diagramma di Eulero-Venn
e la matrice della relazione:



Guardando le rappresentazioni, rispondi alle domande:

	1	8	3	4					5		6
1		1									
8											
7		1	0								
0				1							

La relazione è riflessiva?

La relazione è antisimmetrica?

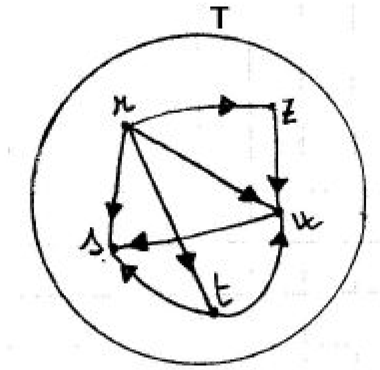
La relazione è transitiva?

È vero che due elementi distinti sono sempre confrontabili?

Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine totale (due qualsiasi elementi si possono mettere in relazione, cioè sono confrontabili), **in senso largo** (la relazione gode della proprietà riflessiva)**.**

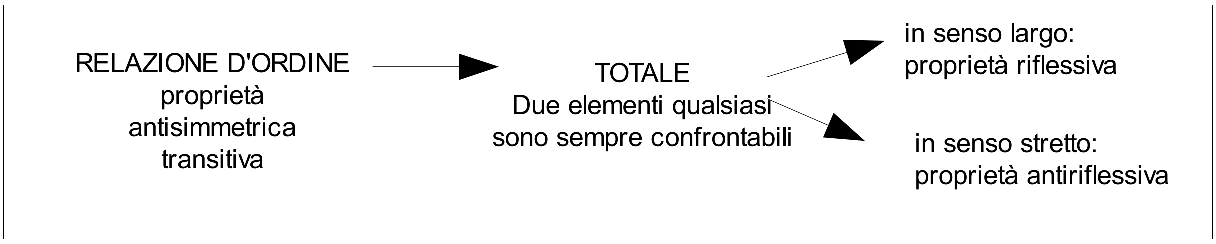
164 E' assegnata la relazione *R* nell'insieme *T*, rappresentata col grafo.
Analizzando il grafo, rispondi alle domande:

- La relazione è riflessiva? … …
- La relazione è antisimmetrica? … …
- La relazione è transitiva? … ….
- Due elementi distinti sono sempre confrontabili? … …

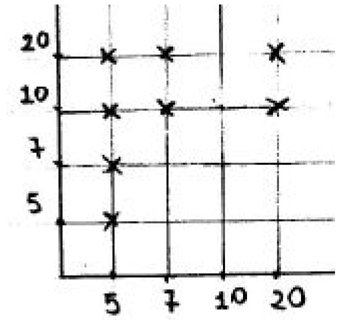


Alla prima domanda avrai risposto negativamente: nessun elemento dell'insieme *T* è in relazione con se stesso, mentre valgono le proprietà antisimmetrica e transitiva; infine scelti due elementi qualsiasi dell'insieme *T*, essi sono sempre confrontabili.

Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine totale (due qualsiasi elementi sono confrontabili), **in senso stretto** (la relazione gode della proprietà antiriflessiva)**.**



165 Verifica che la relazione R: "essere divisore" introdotta nell'insieme $J = \{3, 6, 10, 15, 21\}$ è una relazione d'ordine parziale in senso largo.



166 Perché la relazione R assegnata con il grafico cartesiano riportato a lato, pur essendo una relazione d'ordine non può essere classificata in nessuna delle tipologie studiate? Dai una breve motivazione indicando quali proprietà non sono soddisfatte dalla relazione rappresentata.

167 Nell'insieme $S = \{£, \$, \&, !, ?\}$ è definita una relazione R il cui Insieme Grafo è :

$G_R = \{(£, £) ; (\$, \$) ; (\&, \&) ; (?, ?) ; (!, !) ; (£, \&) ; (\$, \&) ; (!, ?)\}$

R è una relazione d'ordine? Di quale tipo?

168 Nell'insieme degli studenti della tua classe determina le proprietà della relazione R: "xRy se e solo se l'altezza di x non supera l'altezza di y". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

169 Nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$ la relazione R: "essere divisibile"

[A] non è una relazione d'ordine

[B] è antiriflessiva

[C] è d'ordine totale

[D] è d'ordine parziale in senso largo

[E] è d'ordine parziale in senso stretto

170 Nell'insieme N–{0} la relazione "essere divisibile" è d'ordine totale in senso largo?

171 Nell'insieme M={a,b,c,m,n,h} la relazione di cui è assegnato il grafo è:

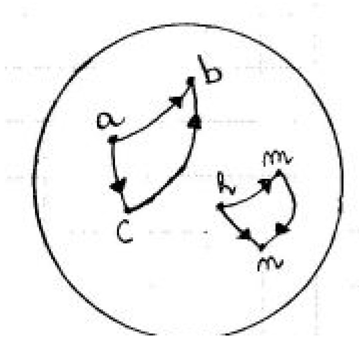
[A] d'equivalenza

[B] non transitiva

[C] d'ordine parziale in senso stretto

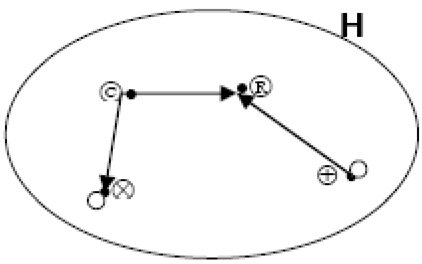
[D] d'ordine totale in senso stretto

[E] d'ordine totale in senso largo



172 Rappresenta nelle tre modalità studiate una relazione che sia solo simmetrica; ripeti le rappresentazioni per una relazione che sia almeno simmetrica. Quale significato hanno le due richieste formulate sopra?

173 Nell'insieme H = {®, ©, ⊗, ⊕ }è introdotta la relazione ***R*** di cui è rappresentato il grafo.
Determina l'insieme $\mathbf{G}_R$ Grafo della Relazione; costruisci il grafico cartesiano e la matrice.



174 L'insieme $\mathbf{G}_R$ di una relazione introdotta nell'insieme A = {a, b, c, d, e} è $\mathbf{G}_R$ = {(a,a) ; (a,b) ; (b,b) ; (d,d) ; (c,d) ; (d,e) ; (e,e) }; quale delle seguenti affermazioni è vera

[A] *R* è una relazione antiriflessiva
[B] *R* è una relazione solo antisimmetrica
[C] *R* è una relazione riflessiva
[D] *R* è una relazione transitiva e antisimmetrica

175 Verifica se la relazione *R* assegnata con la matrice rappresentata sotto è d'equivalenza, in caso positivo determina la partizione dell'insieme $A = \{\square, \lozenge, \infty, \nabla\}$ e l'insieme quoziente *A/R*.

	□	◊	∞	∇
□	1	1	0	0
◊	1	1	0	0
∞	0	0	1	1
∇	0	0	1	1

176 La relazione *R* : "essere vicini di banco" inserita nell'insieme degli alunni della tua classe è una relazione d'equivalenza? È una relazione d'ordine?

177 I tre sottoinsiemi A_1 = { 36, 135, 432}; A_2 = {65}; A_3 = {66, 3522, 93, 435} dell'insieme A = {36, 65, 66, 93, 135, 432, 435, 3522 }costituiscono una partizione dell'insieme A? Sapresti trovare una caratteristica per gli elementi di ciascun sottoinsieme? A_1, A_2, A_3 sono classi d'equivalenza?

178 Nell'insieme *N* la relazione *R*: " x *R* y se e solo se $x \cdot y$ è un numero dispari" è d'equivalenza?

179 La relazione *R* : "x *R* y se e solo se x sta nella stessa nazione di y" nell'insieme

K = {Parigi, Madrid, Milano, Siviglia, Bari, Granata, Venezia, Lione}

è d'equivalenza? Costruisci *A/R*.

180 In un torneo di pallavolo gareggiano quattro squadre A, B, C, D; rappresenta con un grafo a frecce le seguenti informazioni, relative alle prime tre giornate:

- I° giorno: A vince contro B; C vince contro D
- II° giorno: D vince contro A; B vince contro C
- III° giorno: A vince contro C; B vince contro D

Il quarto giorno si gioca la semifinale tra le prime due classificate e le altre due.

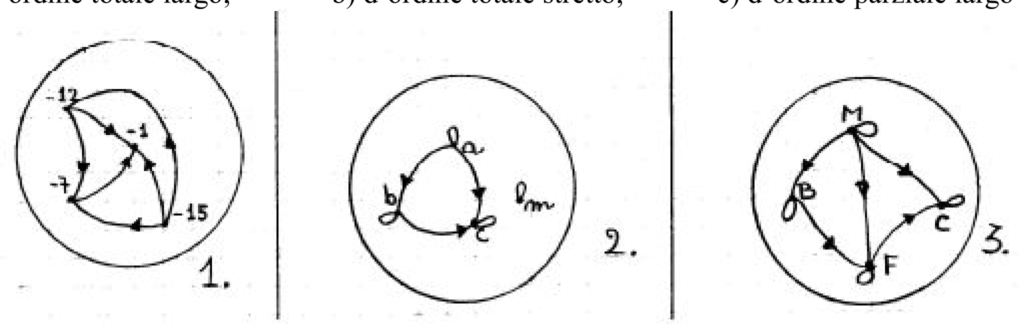
Se per ogni vittoria si ottiene un punteggio di 10 punti e per ogni sconfitta un punteggio di 2 punti, quale squadra gioca la semifinale con B?

Il torneo è vinto dalla squadra C.

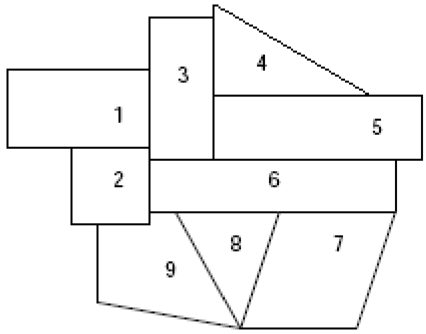
Rappresenta con un grafo a frecce la situazione della semifinale e quella della finale. È unica la risposta a quest'ultimo quesito?

181 Associa a ciascun grafo la corretta relazione d'ordine:

a) d'ordine totale largo; b) d'ordine totale stretto; c) d'ordine parziale largo



182 Andrea, insegnante di grafica, ha chiesto ai suoi alunni di usare il minimo numero di colori per colorare questo modello, in modo che poligoni confinanti non risultino con lo stesso colore.
Come si può risolvere il problema?



<u>*Traccia di soluzione:*</u>
Nell'insieme Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} studia la relazione R: "confinare con", rappresentandola con un grafico cartesiano e sfrutta i risultati trovati per risolvere il problema. [Risposta: 3]
La soluzione può essere trovata fissando un punto interno a ciascuna regione: due punti sono uniti se e solo se le regioni confinano, il segmento che li congiunge deve attraversare solo il loro confine comune; i punti che non sono congiunti indicano regioni che avranno lo stesso colore.

183 Nell'insieme di tutti gli iscritti a FaceBook determina le proprietà della relazione R: "x *R* y se e solo se il numero di amici di x supera il numero di amici di y". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

► 8. Particolari relazioni d'equivalenza

La costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi

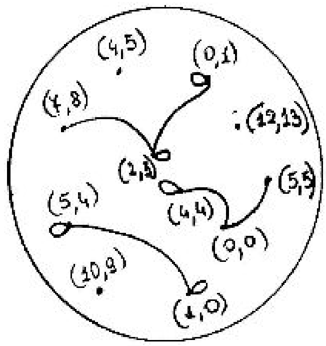
" Dio fece i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo."
Leopold Kronecker (Liegnitz 1823, Berlino 1891)

<u>Esempio</u>
Preso l'insieme A = {(4,5), (7,8), (0,1), (2,3), (5,4), (12,13), (10,9), (5,5), (1,0), (4,4), (0,0)}, sottoinsieme del prodotto cartesiano NxN, considera in A la relazione *R* così definita:

"(m,n) *R* (p,q) se e solo se la somma di m con q è uguale alla somma di n con p"

in linguaggio matematico: (m,n) *R* (p,q) se e solo se m+q = n+p

- Completa il suo grafo e deduci le proprietà:
- Costruisci e rappresenta con diagrammi di Eulero-Venn la partizione P(A) dell'insieme A e l'insieme quoziente A/*R*.
- Quante classi d'equivalenza hai ottenuto?
- È vero che ciascuna di esse può essere rappresentata da una coppia avente almeno un elemento nullo?
- Scrivi i rappresentanti delle classi d'equivalenza.



Proviamo ora a generalizzare quanto ottenuto.
Nel prodotto cartesiano NxN consideriamo la relazione *R* definita nell'attività precedente; essendo NxN formato da infiniti elementi non possiamo rappresentare il grafo della relazione, ma possiamo comunque studiarne le proprietà per stabilire se anche in questo insieme si mantengono le conclusioni raggiunte nell'esercizio.

- La relazione è riflessiva: per qualunque coppia (m,n) di NxN si ha (m,n) *R* (m,n).

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza m+n = n+m, vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché l'addizione in N gode della proprietà commutativa.
Con riferimento all'attività precedente hai potuto infatti mettere il cappio sopra ogni coppia: ad esempio è vero che (4,5) *R* (4,5) poiché 4+5 = 5+4.

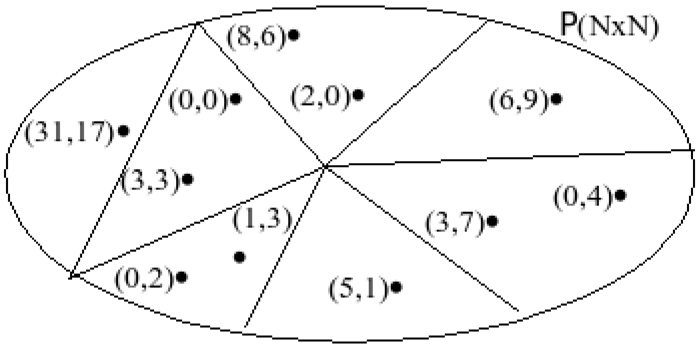
- La relazione è simmetrica: per qualunque (m,n) e (p,q) appartenenti a NxN, se (m,n)*R*(p,q) allora (p,q)*R*(m,n).

Infatti se (m,n)*R*(p,q) si ha m+q = n+p; per la proprietà commutativa dell'addizione in N si ha anche p+n = q+m, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p,q) e (m,n).
Nell'esercizio precedente, ad esempio, la coppia (5,4) è in relazione con la coppia (10,9) perché è vero che 5+9 = 4+10; da questa è anche vero che 10+4 = 9+5, uguaglianza che assicura (10,9)*R*(5,4): nel grafo hai usato archi per evidenziare coppie in relazione.

- La relazione è transitiva: se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) allora (m,n)*R*(s,t) , per qualunque terna di coppie (m,n) , (p,q) , (s,t) appartenenti a NxN.

Infatti se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) si ha m+q = n+p e p+t = q+s; sommando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene m+q + p+t = n+p + q+s che può anche essere scritta
(m+t)+(q+p)=(n+s)+(q+p) per le proprietà commutativa e associativa dell'addizione in N. Confrontando i membri dell'uguaglianza si deduce che m+t = n+s, e quest'ultima assicura la verità dell'affermazione (m,n)*R*(s,t).
Riferendoti all'esercizio svolto sopra hai potuto stabilire che (5,4)*R*(10,9) e (10,9)*R*(1,0) poiché 5+9=4+10 e 10+0=9+1; procediamo come nel ragionamento precedente e sommiamo membro a membro le due uguaglianze; otteniamo 5+9+10+0 = 4+10+9+1, uguaglianza che si può anche scrivere (5+0)+(9+10) = (4+1)+(10+9), da cui 5+0=4+1 che assicura la verità di (5,4)*R*(1,0): nel grafo della relazione compaiono triangoli aventi come vertici coppie in relazione.

Conclusione 1
La relazione R così introdotta nell'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme NxN.



Analizzando con attenzione P(NxN), possiamo determinare quale coppia ci conviene assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza.
Si può osservare che

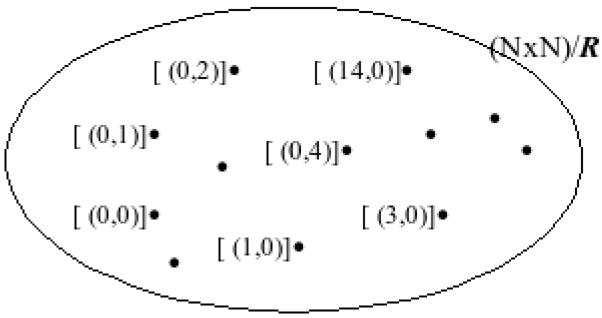
- coppie formate da elementi uguali appartengono alla stessa classe d'equivalenza che può quindi essere rappresentata dalla coppia (0,0);
- la coppia (m,n) con m > n è equivalente alla coppia (m-n,0) essendo m+0 = n+m-n; pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m,n) può essere rappresentata dalla coppia (m-n,0);
- la coppia (m,n) con m < n è equivalente alla coppia (0, n-m) essendo m+n-m = n+0; pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m,n) è rappresentata dalla coppia (0,n-m).

184 Determina la coppia avente un elemento nullo, equivalente a

- (31,17) … … … … (6,9) … … … … (5,1) … … … …

Conclusione 2
Ciascuna classe d'equivalenza può essere rappresentata da una coppia di numeri naturali avente almeno un elemento nullo.

L'insieme quoziente (NxN)/*R* è pertanto:



DEFINIZIONI
Si chiama **numero intero relativo** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in NxN la relazione (m,n) *R* (p,q) se e solo se m+q = n+p.
Si chiama **forma canonica del numero intero relativo** la coppia scelta come rappresentante della classe d'equivalenza.

Possiamo ad esempio dire che la classe [(3,7)] è un numero intero relativo di forma canonica (0,4).

185 Completa la tabella:

numero intero relativo	elementi della classe d'equivalenza	forma canonica del numero intero
[(5,7)]		
	(7,5) (11,9) (34,32) (3,1) ……….	
		(7,0)
[(56,90)]		
	(3,3) (76,76) (9,9) (43,43) ……….	
		(0,4)
	(4,9) (8,13) (57,62) ……………	

DEFINIZIONI
Si chiama **numero intero positivo** la classe d'equivalenza [(n,0)] e si indica con il simbolo +n.
Si chiama **numero intero negativo** la classe d'equivalenza [(0,n)] e si indica con il simbolo -n
Si chiama **zero** la classe d'equivalenza [(0,0)] e si indica con 0
Si chiama **valore assoluto del numero intero relativo** il numero naturale diverso da zero che compare nella sua forma canonica.

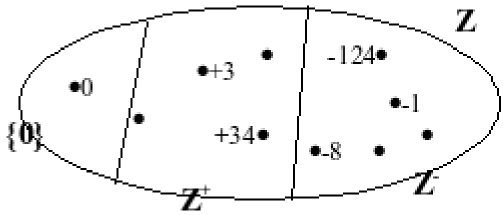
186 Completa la tabella:

numero intero	forma canonica	simbolo usuale	valore assoluto
		+ 6	
	(0,2)		
[(5,5)]			
		- 1	

DEFINIZIONE. L'insieme (NxN)/*R* è chiamato **insieme dei numeri interi relativi** e indicato con il simbolo $\mathbb{Z}$.

Osservazioni

- L'insieme dei numeri interi relativi viene semplicemente chiamato insieme dei numeri interi.
- Esso contiene tre sottoinsiemi Z^+ = {x / x è intero positivo}, Z^- = {x / x è intero negativo}, e l'insieme il cui unico elemento è lo zero {0}. Scriviamo quindi $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$ e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn:



- Quando si debbano considerare solamente gli interi positivi e negativi si usa il simbolo Z_0 col quale si indica che l'insieme dei numeri interi relativi è stato privato dello zero:
  $Z_0 = Z^+ \cup Z^- = Z - \{0\}$

La costruzione dell'insieme dei numeri razionali

Indichiamo con N_0 l'insieme dei naturali privato dello zero, precisamente $N_0 = N - \{0\}$e costruiamo l'insieme NxN_0; esso sarà costituito da tutte le coppie ordinate di numeri naturali di cui il secondo elemento è diverso da zero, cioè $(0,3)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ mentre $(5,0)\notin\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$.
In questo insieme sia *R* la relazione così definita
(m,n)*R*(p,q) se e solo se m·q = n·p

Esempio

Segna se Vero o Falso e dai la motivazione di quanto affermi:			
coppie	V	F	motivazione
(3,5) R (15,25)			
(3,9) R (1,3)			
(8,9) R (7,8)			
(0,6) R (0,1)			

Analizziamo le proprietà della relazione:

- La relazione è riflessiva: per qualunque $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ si ha (m,n) *R* (m,n).

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza m·n = n·m, vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché la moltiplicazione in N gode della proprietà commutativa.

- La relazione è simmetrica: per qualunque (m,n) e (p,q) dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ se (m,n)*R*(p,q) allora (p,q)*R*(m,n).

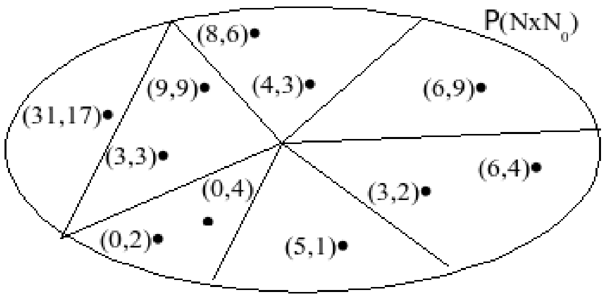
Infatti se (m,n)*R*(p,q) si ha m·q = n·p; per la proprietà commutativa della moltiplicazione in N si ha anche p·n = q·m, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p,q) e (m,n).

- La relazione è transitiva: se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) allora (m,n)*R*(s,t) , per qualunque terna di coppie (m,n) , (p,q) , (s,t) appartenenti a NxN_0.

Infatti, se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) sappiamo che m·q = n·p e che p·t = q·s; ora moltiplicando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene m·q · p·t = n·p · q·s che può anche essere scritta (m·t)·(q·p) = (n·s)·(q·p) per le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione in N. Confrontando i membri dell'uguaglianza e dividendo per i fattori uguali si deduce che m·t = n·s, che assicura la verità dell'affermazione (m,n)*R*(s,t).

Conclusione 3

Si può concludere che la relazione *R* introdotta nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$.



Vogliamo determinare la coppia da assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza.

Per fare questo associamo a ciascuna coppia (a,b) di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ la frazione $\frac{a}{b}$ e osserviamo che la relazione *R* in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ prende significato se trasferita nell'insieme delle frazioni dalla operazione che permette di costruire frazioni equivalenti.

Esempio

Presa la coppia (4,3) ad essa associamo la frazione $\frac{4}{3}$; alla coppia (8,6) associamo la frazione $\frac{8}{6}$. Le coppie (4,3) e (8,6) stanno nella stessa classe d'equivalenza poiché 4·6 = 3·8; le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$ sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

187 Completa il ragionamento:

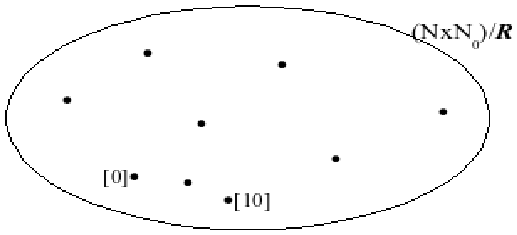
Alla coppia (6,4) viene associata la frazione ……; alla coppia (.., ...) è associata la frazione $\frac{3}{2}$.

Le coppie … … … … … stanno nella … … … … … … … … … … … … … … .... … …;
le frazioni … … … … … … sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

188 Ripeti l'esercizio prendendo coppie di NxN_0 in relazione e mostrando la relazione di equivalenza tra le rispettive frazioni.

Conclusione 4
Tutte le coppie appartenenti ad una classe d'equivalenza risultano associate ad una stessa frazione; scegliamo dunque come rappresentante di ciascuna classe la frazione ridotta ai minimi termini.

L'insieme quoziente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0/R$ è pertanto:



DEFINIZIONI
Si chiama **insieme dei numeri razionali assoluti** l'insieme quoziente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0/R$; si indica con il simbolo Q_A.
Si chiama **numero razionale assoluto** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in $N \times N_0$ la relazione *R*: (m,n) *R* (p,q) se e solo se $m \cdot q = n \cdot p$; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini.

Quanto abbiamo detto ci permette di passare dall'insieme delle frazioni ad un insieme di numeri che, benché scritti con il simbolo *m/n*, lo stesso usato per rappresentare una parte di una grandezza, hanno un significato completamente diverso dalla frazione. D'altra parte, hai già visto nella secondaria di primo grado che al simbolo *m/n* si può attribuire il significato di quoziente della divisione tra il numeratore e il denominatore e che i numeri razionali sono tutti quelli che si possono scrivere sotto forma di frazione.

189 Completa la tabella:

coppie	appartengono alla stessa classe d'equivalenza?	rappresentante della classe	rappresentano lo stesso numero razionale?	simbolo del numero razionale
(1,2); (3,6)	SI	$[\frac{1}{2}]$	SI	$\frac{1}{2}$
(2,7); (4,49)				
(8,5); (40,25)				
(60,12); (5,0)				
(20,2); (10,1)				

190 Completa la catena di trasformazioni:

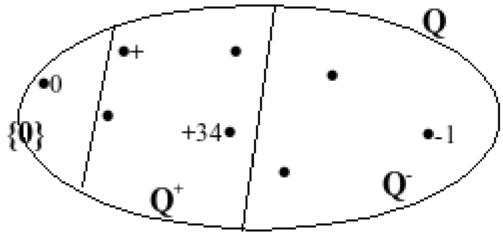
coppie	numero razionale come frazione	rappresentazione decimale
(1,2)*R*(3,6)	$\frac{1}{2}$	0.5
(2,7)*R*(4,14)		
(8,5)*R*(40,25)		
(60,12)*R*(10,2)		
(2,3)*R* (12,18)		

Conclusione 5
Se introduciamo la stessa relazione *R* nell'insieme $Z \times Z_0$, possiamo ottenere le seguenti definizioni:

DEFINIZIONI
Si chiama **insieme dei numeri razionali relativi** l’insieme quoziente $(ZxZ_0)/R$; esso si indica con il simbolo Q.
Si chiama **numero razionale relativo** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in ZxZ_0 la relazione *R*: (m,n) *R* (p,q) se e solo se m·q = n·p ; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini dotata di segno.

Osservazioni

- L'insieme dei numeri razionali relativi viene più semplicemente chiamato insieme dei numeri razionali.
- Esso contiene tre sottoinsiemi particolari Q^+ = {x / x è razionale positivo}, Q^- = {x | x è razionale negativo}, e l'insieme il cui unico elemento è lo zero {0}. Scriviamo quindi $Q = Q^+ U Q^- U \{0\}$ e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn:



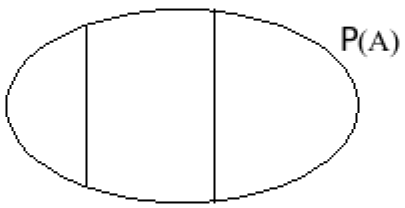
- Quando si devono considerare solamente i razionali positivi e negativi, zero escluso, si usa il simbolo Q_0 col quale si indica appunto l'insieme dei numeri razionali relativi privato dello zero: $Q_0 = Q^+ U Q^- = Q - \{0\}$

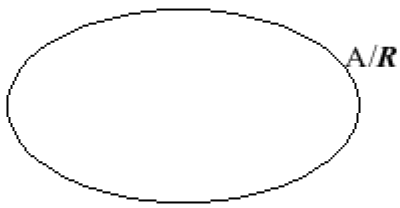
Classi di resti modulo n

191 Considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per 3" introdotta nell'insieme $A=\{n \in \mathbb{N} / 0 \leqslant n \leqslant 13\}$ e studiane le proprietà.
Ricordiamo che il resto della divisione si calcola con l’operazione *mod*; completiamo dunque la tabella sottostante:

	0 mod 3	1 mod 3	2 mod 3				6 mod 3	7 mod 3				11 mod 3		13 mod 3
resto	0						0					2		

La relazione *R* è d’equivalenza; infatti … … … … … … … … … … … … … … … … … … …
… …
Completa l’insieme P(A) partizione dell’insieme A e l'insieme quoziente A/*R*





Quali sono i rappresentanti delle classi d’equivalenza?
Sarebbe cambiato qualcosa se avessimo introdotto la stessa relazione nell'insieme N?
E se sostituissimo N con Z cosa cambierebbe?

192 Nell’insieme N considera la relazione d’equivalenza *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per 2". Quante classi d’equivalenza puoi formare? Rappresenta l’insieme P(N). Quali sono i rappresentanti di ciascuna classe? Riconosci in queste classi, particolari sottoinsiemi dell’insieme N?

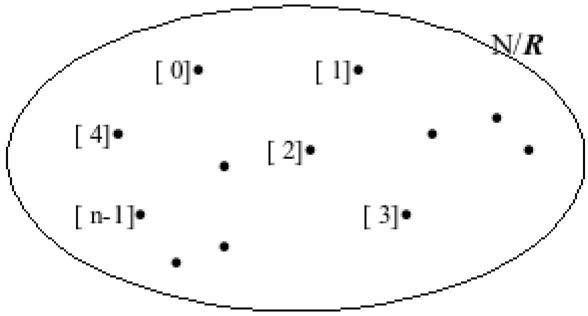
Generalizziamo ora l'esercizio.
Fissato un numero naturale n > 1, considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione intera per n" introdotta nell'insieme N, studiane le proprietà e stabilisci se è d'equivalenza.

Osserviamo innanzitutto che nella divisione intera per n il resto si ottiene con l'operazione *mod* e si ha come resto 0, 1, 2, ………. n-1 cioè n resti;

- La relazione è riflessiva, infatti per qualunque mÎ N si ha m*R*m.
- La relazione è simmetrica, infatti per qualunque p e q dell'insieme N se p*R*q allora q*R*p. Precisamente, se p*R*q significa che p *mod* n = q *mod* n e per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scrivere q *mod* n = p *mod* n, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra q e p.
- La relazione è transitiva: se p*R*q e q*R*s allora p*R*s , per qualunque terna di naturali. Infatti se p*R*q significa p *mod* n = q *mod* n e se q*R*s significa che q *mod* n = s *mod* n; per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha p *mod* n = s *mod* n, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra p e s.

Conclusione 6

La relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione intera per n", introdotta nell'insieme dei numeri naturali, è una relazione d'equivalenza e permette quindi una partizione dell'insieme N in n classi d'equivalenza aventi come rappresentanti tutti e soli i possibili resti della divisione intera per n. L'insieme quoziente è formato da n elementi, viene rappresentato come in figura e viene chiamato **insieme delle classi di resti modulo *n*.**



L'insieme quoziente *N/R* si indica anche col simbolo N_n dove l'indice *n* indica il numero rispetto al quale si è eseguita l'operazione *mod*.

193 Determina gli elementi di N_7.

Traccia di soluzione:

Nell'insieme N si considera la relazione d'equivalenza *R*:"avere lo stesso resto nella divisone per 7"

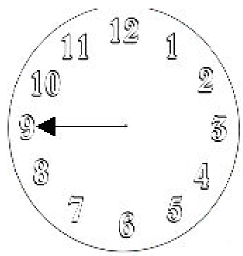
Le classi d'equivalenza sono: [0], [ ], … … … … …, [6].

Nella classe [0] stanno tutti i … … … … … … … che divisi per 7 danno … …, cioè … … …

In quale classe sta il numero 427? E il numero 74?

194 Elenca e descrivi gli elementi dell'insieme Z_{12}.

Trovi qualche analogia con il disegno dell'orologio riprodotto accanto?



Come rispondi alla domanda :"5 ore dopo le 9 di mattina dove si trova la lancetta delle ore?" È sbagliato dire "4 ore dopo le 9 di mattina sono le 2"?

195 Nel supermercato al banco della frutta la bilancia presenta una tastiera come quella in figura, premendo il bottone relativo alla frutta da pesare si ottiene l'adesivo con il prezzo.

Sistema, senza contare casella per casella, il numero che corrisponde ai miei acquisti di oggi:

zucchine al numero75; arance al numero 63; spinaci al numero 48; patate al numero 56.

Hai potuto sfruttare le classi di resti modulo 8?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

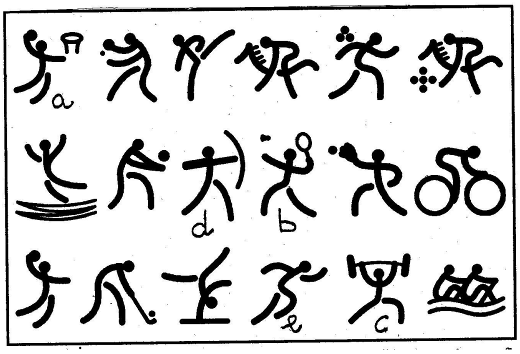
5. CORRISPONDENZE TRA INSIEMI

►1. Prime definizioni

Ti proponiamo due semplici esercizi per introdurre l'argomento che qui vogliamo trattare.

196 Quando camminiamo per la strada della nostra città, vediamo tanti segnali lungo il percorso che, attraverso simboli, ci danno informazioni sul comportamento corretto che dobbiamo tenere.
Sia A = {segnali stradali della figura accanto} e B = {divieto di accesso, divieto di transito, attraversamento pedonale, obbligo di fermata, diritto di precedenza, doppia curva, strada deformata, senso obbligato}; Come nell'esempio, collega con una freccia un segnale stradale con il suo significato, aggiungi il significato degli altri simboli prendendoli dall'insieme B:

197 In occasione dei giochi olimpici del 2008, artisti cinesi hanno interpretato graficamente alcuni sport tracciando i simboli riprodotti in figura.
Tra questi alcuni sono evidenziati con lettere dell'alfabeto (a,b,c,d,e). Sia F = {a, b, c, d, e} e *K* il predicato binario: "rappresenta graficamente".
Scrivi tutte le proposizioni vere che puoi formare prendendo come soggetto del predicato *K* un elemento di F e come complemento un elemento dell'insieme degli sport S = {corsa, pallacanestro, tennis, tiro con l'arco, sollevamento pesi}, come nell'esempio:



Il simbolo *e rappresenta graficamente la corsa*
Il simbolo *a* ……………………………………
Il simbolo ………………………………………
Il simbolo ……………………………………..
Il simbolo ……………………………………..

In entrambi gli esercizi, hai formato coppie ordinate associando ad un elemento del primo insieme un elemento del secondo insieme mediante il predicato binario enunciato.

DEFINIZIONE. Si chiama **corrispondenza *K* tra due insiemi A e B**, il predicato binario avente come soggetto un elemento di A e come complemento un elemento di B. Essa definisce un sottoinsieme $\mathbf{G}_K$ del prodotto cartesiano AxB, costituito dalle coppie ordinate di elementi corrispondenti:
$G_k = \{(a, b) \in A \times B / a K b\}$.

Osservazione
Nel capitolo precedente abbiamo chiamato relazione un predicato binario che si riferisce a due elementi dello stesso insieme; la differenza di terminologia sta semplicemente nella sottolineatura del fatto che si considerano appartenenti allo stesso insieme oppure appartenenti a due insiemi diversi il soggetto e il complemento del predicato binario enunciato.
A seconda del contesto in cui analizziamo un predicato binario, parleremo di corrispondenza o di relazione.
Nelle pagine che seguono tratteremo di corrispondenze, mettendo in luce le loro caratteristiche.

DEFINIZIONE. Si chiama **dominio D** di una corrispondenza l'insieme A in cui si trova il soggetto della proposizione vera costruita con il predicato *K*; **codominio C** l'insieme degli elementi che costituiscono il complemento della stessa proposizione.

Per indicare in linguaggio matematico che si è stabilita una corrispondenza tra due insiemi A e B scriviamo:

$k: A \to B$ "predicato" oppure ***K***: $A \xrightarrow{K:predicato} B$.

Formalizziamo quanto fatto con i primo 2 esercizi di questo capitolo:

$k: A \to B$ "significare", oppure $A \xrightarrow{K:significare} B$; dominio **D = A**; codominio **C = B**

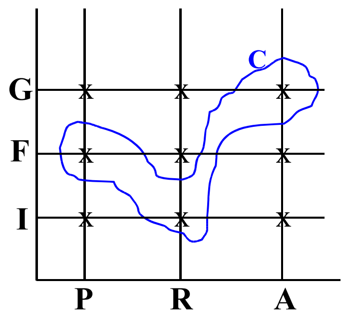
$k: F \to S$ "rappresentare graficamente", oppure $F \xrightarrow{K:rappresentare\ graficamente} S$ dominio F; codominio S.

DEFINIZIONE. Definita una corrispondenza $k: A \to B$, nella coppia (a,b) di elementi corrispondenti, **b** si chiama **immagine di a nella corrispondenza *K***. L'insieme delle immagini degli elementi del dominio è un sottoinsieme del **C**odominio chiamato **insieme Immagine**. Verrà indicato con **IM** e $\mathrm{IM} \subseteq C$.

►2. Rappresentazione di una corrispondenza

Esempio

Consideriamo gli insiemi: A = {**P**arigi, **R**oma, **A**tene} e B = {**I**talia, **F**rancia, **G**recia}; il prodotto cartesiano AxB è rappresentato col grafico cartesiano (i suoi elementi sono segnati con le crocette in nero).



Esso è formato dalle 9 coppie ordinate aventi come primo elemento una città (elemento di A) e come secondo elemento uno stato d'Europa (elemento di B).

Il predicato binario ***K***:"essere la capitale di", introdotto nell'insieme AxB, determina il sottoinsieme $\mathbf{G}_K$ i cui elementi sono le coppie (Parigi, Francia); (Roma, Italia) ; (Atene, Grecia).

Il dominio della corrispondenza è **D** = {**P**arigi, **R**oma, **A**tene} e il codominio è **C** = {**I**talia, **F**rancia, **G**recia}e **IM = C**.

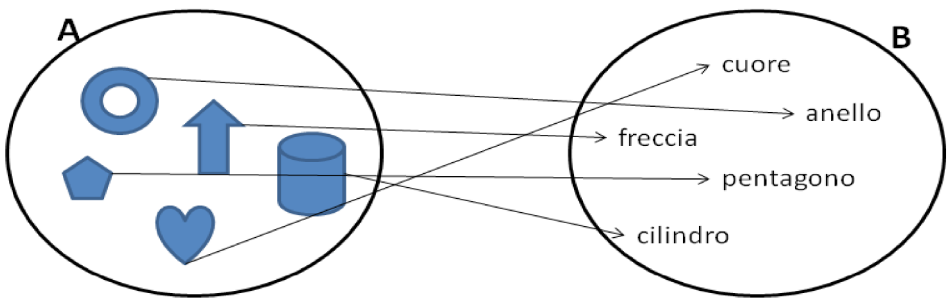
Una corrispondenza si può rappresentare con un grafico cartesiano

198 Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza K: "essere nato nell'anno" di dominio l'insieme A = {Galileo, Napoleone, Einstein, Fermi, Obama, } e codominio l'insieme B = {1901, 1564,1961,1879,1769,1920,1768} . Rappresenta per elencazione il sottoinsieme G_K del prodotto cartesiano AxB. Stabilisci infine gli elementi di IM.

199 L'insieme A={casa, volume, strada, ufficio, clavicembalo, cantautore, assicurazione} è il codominio della corrispondenza *K*: "essere il numero di sillabe di" il cui dominio è $X = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$. Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza assegnata, evidenzia come nel primo esempio di questo paragrafo l'insieme G_K , scrivi per elencazione l'insieme IM .

Esempio

Nella figura sottostante sono rappresentati gli insiemi A e B con diagrammi di Eulero-Venn;



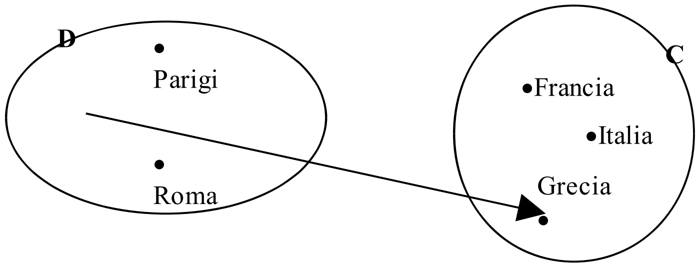
Collegando con una freccia, ciascun elemento di A con la sua forma, possiamo rappresentare con un grafico sagittale la corrispondenza ***K***: "essere di forma" tra gli insiemi assegnati.

A risulta essere il **D**ominio e **B** il **C**odominio della corrispondenza; **IM = C.** La freccia che collega ogni elemento del dominio con la sua immagine rappresenta il predicato ***K***.

Una corrispondenza si può rappresentare con un grafico sagittale

200 Completa la rappresentazione con grafico sagittale della corrispondenza definita nell'esempio 1

La freccia che collega gli elementi del dominio con quelli del codominio rappresenta il predicato ***K***: " essere la capitale di".



Esempio

Consideriamo gli insiemi R = {regioni d'Italia} e M = {Ligure, Ionio, Tirreno, Adriatico} e la corrispondenza $k: R \rightarrow M$ "essere bagnata/o da"; **R** è il **D**ominio e **M** il **C**odominio di questa corrispondenza.

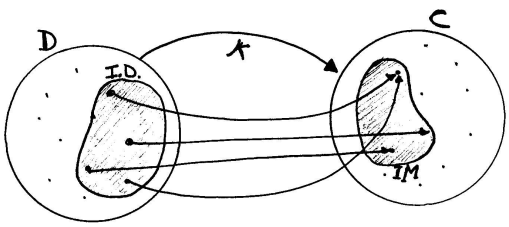
L'insieme $\mathbf{G}_K$ delle coppie ordinate aventi come primo elemento una regione e come secondo elemento un mare è:

$\mathbf{G}_K$ = {(Liguria, Ligure); (Toscana, Tirreno); (Lazio, Tirreno); (Campania, Tirreno); (Basilicata, Tirreno); (Calabria, Tirreno); (Calabria, Ionio); (Puglia, Ionio); (Puglia, Adriatico); (Molise, Adriatico); (Abruzzo, Adriatico); (Emilia-Romagna, Adriatico); (Marche, Adriatico); (Veneto, Adriatico);(Friuli Venezia Giulia, Adriatico}.

Se rappresentiamo questa corrispondenza con un grafico sagittale notiamo che non tutti gli elementi del **D**ominio hanno l'immagine in ***K***. La corrispondenza definita si può generare solo in un sottoinsieme del **D**ominio.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **I**nsieme di **D**efinizione della corrispondenza, indicato con **I.D.** il sottoinsieme del **D**ominio i cui elementi hanno effettivamente un corrispondente nel **C**odominio.

Nel grafico è rappresentata una generica situazione formatasi dall'aver definito una corrispondenza tra due insiemi; sono in grigio l'**I**nsieme di **D**efinizione, sottoinsieme del Dominio e l'insieme **IM**magine, sottoinsieme del **C**odominio.



Osserviamo che in taluni casi si ha la coincidenza del **D**ominio con l'**I**nsieme di **D**efinizione e la coincidenza del Codominio con l'insieme IMmagine: **D=I.D.** e **C=IM**

►3. Caratteristiche di una corrispondenza

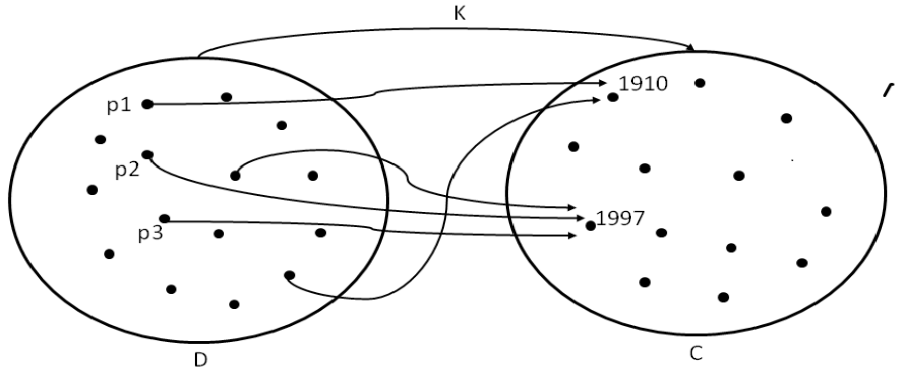
In questo paragrafo vogliamo analizzare alcuni tipi di corrispondenza; lo faremo riprendendo alcuni esempi già visti e analizzandone di nuovi.

Esempio

Generalizziamo uno degli esercizi precedenti sulle date di nascita, prendiamo come dominio **D** = {persone italiane viventi} e come codominio **C** = {gli anni dal 1900 al 2009}.

Evidentemente **I.D. = D**, ogni persona ha un determinato anno di nascita, ma **più persone sono nate nello stesso anno**; inoltre IM potrebbe coincidere con C, vista la presenza sul territorio nazionale di ultracentenari, comunque scriveremo $IM \subseteq C$.

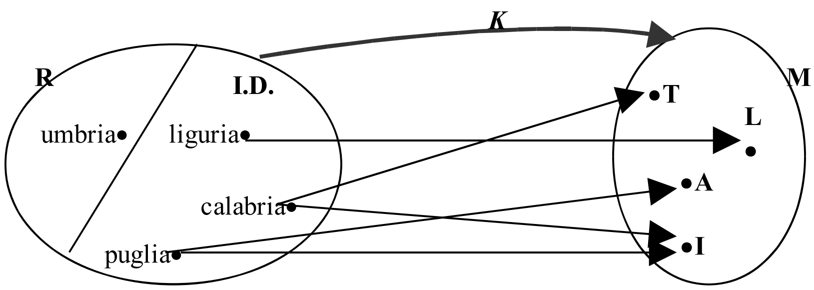
Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Una corrispondenza di questo tipo è detta molti → uno.

Esempio

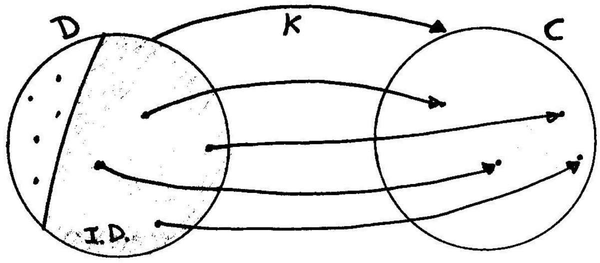
Analizziamo la corrispondenza dell'esempio precedente $k : R \to M$ "essere bagnata/o da" tra l'insieme delle regioni d'Italia e l'insieme dei mari; $\mathrm{I.D.} \subset \mathrm{D}$ poiché alcune regioni non sono bagnate da alcun mare; **molte regioni sono bagnate dallo stesso mare**, ma succede che **alcune regioni sono bagnate da due mari**. **IM = C**: un mare bagna almeno una regione. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Una corrispondenza di questo tipo è detta molti → molti.

Esempio

Generalizziamo la corrispondenza ***K***: " essere la capitale di " tra gli insiemi dominio **D** = {città d'Europa} e codominio **C** = {stati d'Europa}. È evidente che $\mathrm{I.D.} \subset \mathrm{D}$ **non tutte le città sono capitali**, mentre **IM = C** in quanto ogni stato ha la sua capitale; inoltre due città diverse non possono essere capitali dello stesso stato. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



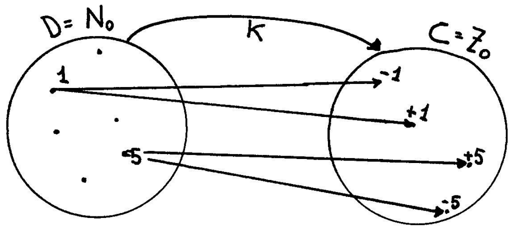
Una corrispondenza di questo tipo è detta uno → uno.

Esempio

Consideriamo tra l'insieme N_0 dei numeri naturali diversi da zero e l'insieme Z_0 degli interi relativi diversi da zero la corrispondenza ***K***: "essere il valore assoluto di".

Per la definizione di valore assoluto di un intero, possiamo senz'altro dire: **N_0 =D=I.D.** ; **Z_0 =C=IM**

Ma succede che **numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto**, quindi ogni elemento di N_0 ha due immagini, per cui il grafico sagittale di questa corrispondenza è:

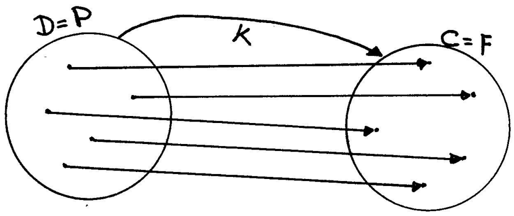


Una corrispondenza di questo tipo è detta uno → molti.

> DEFINIZIONE. Le **corrispondenze** di tipo molti → uno e uno → uno sono dette **univoche**; in esse ogni elemento dell’Insieme di Definizione ha una sola IMmagine nel codominio.

Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K*** che associa ad ogni persona il suo codice fiscale: ogni persona ha il proprio codice fiscale, persone diverse hanno codice fiscale diverso. **D**ominio e **I.D**. coincidono e sono l’insieme P={ persone}, **C**odominio e **IM** coincidono e sono l’insieme
F={ codici fiscali }. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



È di questo stesso tipo il grafico sagittale della corrispondenza che associa ad ogni automobile la sua targa, ad ogni moto il suo numero di telaio, ad ogni maggiorenne, cittadino italiano, il suo certificato elettorale ……..

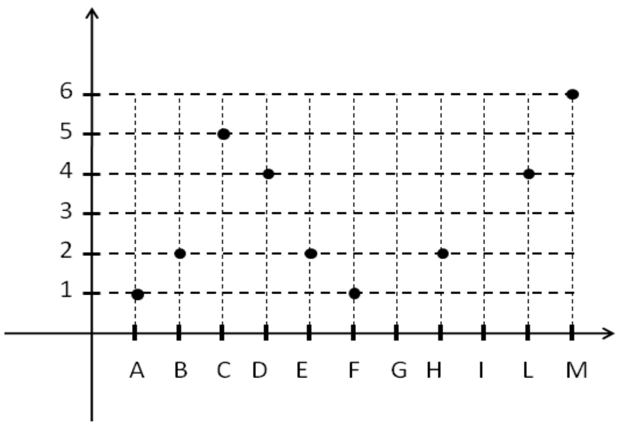
In tutti questi casi la corrispondenza è di tipo **uno → uno**, il dominio coincide con l’insieme di definizione e l’insieme immagine coincide con il codominio.

> DEFINIZONE. Una corrispondenza di tipo **uno → uno** in cui **D = I.D.** e **C = IM** è detta **corrispondenza biunivoca**.

201 È univoca la corrispondenza ***K*** definita tra l’insieme P = { parola del proverbio “rosso di sera, bel tempo si spera”}e l’insieme A = {lettere dell’alfabeto italiano}che associa ad ogni parola la sua iniziale? Ti sembra corretto affermare che Dominio e Insieme di Definizione coincidono? Completa con il simbolo corretto la relazione tra insieme IMmagine e Codominio: IM ….C. Fai il grafico sagittale della corrispondenza.

202 **K** è la corrispondenza tra l’insieme N dei naturali e l’insieme degli interi relativi Z espressa dal predicato “essere il quadrato di”. Ti sembra corretto affermare che Dominio e Insieme di Definizione coincidono? Perché IM = C? La corrispondenza è univoca?

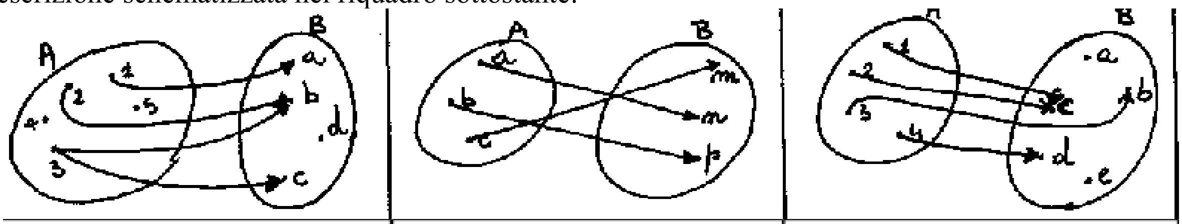
203 Una corrispondenza K è assegnata con il suo grafico cartesiano:



Completa e rispondi alle domande:
D = { ……………………………}
C = { ……………………………}
I.D.= { ……………………………}
IM = { ……………………………}

1. La corrispondenza è univoca?
2. 2 è l’immagine di quali elementi dell’Insieme di Definizione?
3. Quale elemento del codominio è l’immagine di M?

204 I tre grafici sagittali rappresentano altrettante corrispondenze, K_1, K_2, K_3. Completa per ciascuna di esse la descrizione schematizzata nel riquadro sottostante:



D = ……………	**D** = ……………	**D** = ……………
C = ……………	**C** = ……………	**C** = ……………
I.D.= …………	**I.D.**= …………	**I.D.**= …………
IM = ………	**IM** = ………	**IM** = ………
Tipo = ……………	**Tipo** = ……………	**Tipo** = ……………

205 Il Dominio della corrispondenza ***K*** è l'insieme ZxZ e Z ne è il Codomino; l'immagine della coppia (a,b) è l'intero p = a•b.

- Stabilisci l'Insieme di Definizione e l'insieme Immagine.
- Perché questa corrispondenza non è biunivoca?
- Tutte le coppie aventi almeno un elemento uguale a zero hanno come immagine ……….
- 1 è l'immagine di ……………………
- Te gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è ………
- Un numero negativo è immagine di ………………………..

Fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

206 Il Dominio della corrispondenza ***K*** è l'insieme ZxZ e Q ne è il Codomino; l'immagine della coppia (a,b) è il numero razionale $q=\frac{a}{b}$.

1) Stabilisci l'Insieme di Definizione e l'insieme IMmagine.
2) Completa:

- lo zero è immagine delle coppie ………………………..
- se gli elementi della coppia sono numeri opposti l'immagine è ……………..
- se gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è ………
- un numero negativo è immagine di ………………………..

fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

207 In un gruppo di 10 persone, due si erano laureate in medicina e tre in legge nell'anno 1961, mentre quattro anni dopo, una si era laureata in fisica, un'altra in scienze e due in legge.
Considerate i seguenti insiemi:
P = {x / x è una persona del gruppo} ; A = {1960, 1961,1964, 1965}; F = {x / x è una facoltà universitaria}
Fatene la rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn e studiate le corrispondenze K_1, K_2, espresse dai predicati:

K_1:"essersi laureato nell'anno" K_2:"essere laureato in"

mettendo in evidenza per ciascuna Dominio, Codominio, Insieme di Definizione, IMmagine, tipo.
Completate:

- Nel gruppo ci sono … persone laureate in legge, di cui … nell'anno 1961 e le altre … nell'anno…
- Nel 1961 si sono laureate … di cui … in medicina
- Negli anni ……….. non si è laureata nessuna persona del gruppo considerato
- Tra le10 persona … non si è laureata

N.B. ciascuno possiede una sola laurea
Maria si è laureata in fisica nello stesso anno in cui si è laureato suo marito Luca; Andrea è fratello di Luca, non è medico, ha frequentato una facoltà diversa da quella del fratello e si è laureato in un anno diverso. Supponendo che Maria, Luca, Andrea siano tra le 10 persone di cui sopra, completate:

- Maria si è laureata nell'anno …… Andrea si è laureato nell'anno ……… in ………... Luca si è laureato nell'anno ……… in ……….. N.B. ciascuno possiede una sola laurea

►4. Insiemi finiti e insiemi infiniti

Cardinalità di un insieme

Il concetto di “corrispondenza biunivoca” permette di affrontare il problema del confronto tra insiemi. Stabiliamo subito una

DEFINIZIONE. Due insiemi A e B si dicono **equipotenti** se è possibile stabilire tra essi una corrispondenza biunivoca.

Esempio

Sia S l’insieme dei giorni della settimana e H l’insieme delle note musicali:

Sistemando gli elementi dei due insiemi come visualizzato nella seguente tabella

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
H	do	re	mi	fa	sol	la	si

ci rendiamo conto che tra di essi si può stabilire una corrispondenza biunivoca, ottenuta semplicemente associando ad ogni giorno della settimana una e una sola nota musicale.

Possiamo procedere anche scrivendo i giorni della settimana ciascuno su un foglietto da inserire in un’urna A_1 e facendo altrettanto con gli elementi dell’insieme H inseriti in un’urna A_2 ; pescando alternativamente un foglietto da A_1 e uno da A_2 , ci accorgiamo che, esauriti i foglietti in A_1 sono contemporaneamente esauriti quelli in A_2 .

Concludiamo: **l’insieme S è equipotente all’insieme H**.

208 Mostra che l’insieme M dei mesi dell’anno è equipotente all’insieme O dei segni zodiacali.

Consideriamo ora l’insieme $\mathbb{N}_7=\{x\in\mathbb{N}/0<x\leqslant 7\}$ la cui rappresentazione per elencazione è $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7\}$; come abbiamo fatto nell’esempio precedente, possiamo visualizzare la corrispondenza biunivoca che si stabilisce tra S, H e N_7 per mezzo della seguente tabella

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
H	do	re	mi	fa	sol	la	si
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
N_7	1	2	3	4	5	6	7

Si verifica facilmente che il predicato “essere equipotente” è una relazione d’equivalenza: la classe d’equivalenza di insiemi equipotenti è il numero naturale cardinale che ne indica la numerosità.

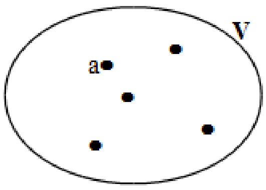
DEFINIZIONE. Si chiama **cardinalità** di un insieme A e si indica con *card*A o **#A** la classe d’equivalenza degli insiemi equipotenti ad A; essa indica il numero degli elementi di A. L’insieme vuoto ha cardinalità 0.

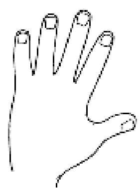
Gli insiemi H, S, N_7 appartengono alla stessa classe d’equivalenza, la caratteristica comune è il numero di elementi: #H = #S = # N_7 = 7.

DEFINIZIONE. Un **insieme** A si dice **finito** se esiste un n, naturale maggiore o uguale ad 1, tale che sussista una corrispondenza biunivoca tra A e N_n. In tal caso scriviamo *card*A = n.

Gli insiemi H e S di cui sopra sono insiemi finiti; gli insiemi M e O dell’esercizio 1 hanno cardinalità 12 e sono insiemi finiti.

209 Stabilisci la cardinalità dell’insieme V delle vocali della lingua italiana e dell’insieme D delle dita di una mano.





Completa l’insieme V. Stabilisci una corrispondenza ………..…. tra ….. e …… … Determina N_n ………..
Concludo: #V = ……… = ………

Prendiamo nuovamente in considerazione l’insieme $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7\}$ e un suo qualunque sottoinsieme

proprio, ad esempio $N_3 = \{1,2,3\}$; risulta evidente che non è possibile stabilire alcuna corrispondenza biunivoca tra N_7 e N_3 .
Questo fatto può essere preso come caratteristica di un insieme finito.
In generale possiamo affermare che l'insieme $\mathbb{N}_n = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x \leqslant n\}$ con $n \geqslant 1$ non ha sottoinsiemi propri che possano essere messi in corrispondenza biunivoca con esso: si dice che N_n è un insieme finito e un qualunque insieme A in corrispondenza biunivoca con N_n è finito e ha cardinalità n.
Esistono insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio?

<u>Esempio</u>

Consideriamo l'insieme N dei naturali e il suo sottoinsieme proprio dei numeri pari, che indichiamo con P. Costruiamo una tabella: qui non possiamo inserire tutti i numeri naturali, quindi metteremo puntini di sospensione per indicare che l'elenco prosegue:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	….

Abbiamo pertanto costruito una **corrispondenza tra** l'insieme **N** (Dominio) **e** l'insieme **P** (Codominio) **di tipo 1→1**: ad ogni numero naturale abbiamo associato il suo doppio (quindi un numero pari) che evidentemente è unico e viceversa ogni pari è l'immagine di un unico naturale. Inoltre il **D**ominio e l'**I**nsieme di **D**efinizione **coincidono** (ogni numero ha il doppio) e anche **C**odominio e insieme **IM**magine **coincidono** (ogni pari è immagine di un solo naturale). La corrispondenza è biunivoca, **N e P sono equipotenti** e la tabella va così modificata:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	….

Questo fatto paradossale non può verificarsi solo per gli insiemi finiti.
Riportiamo la seguente definizione che risale al matematico Richard Dedekind.

DEFINIZIONE. Un **insieme** è **infinito** se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

210 Considera la corrispondenza ***K*** che ad ogni numero naturale associa un numero intero relativo secondo la seguente regola

- se $n \in N$ è pari allora il suo corrispondente è $+\left(\frac{n}{2}\right)$
- se $n \in N$ è dispari allora il suo corrispondente è $\frac{-(n+1)}{2}$

Completa:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….
K	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	

Qual è il numero naturale cui corrisponde il numero intero negativo –5 ? ……………
Qual è l'immagine (il corrispondente) di 15 ? ……………………
Qual è l'insieme IMmagine dell'insieme **N** ? ………………………
La legge definita genera una corrispondenza biunivoca tra **N** e **Z** ? …………………
Quale conclusione puoi trarre ? ………………………………

211 Nel “Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo”, Galileo Galilei pone attraverso la domanda di Salviati e la risposta di Simplicio il problema dell’infinità dei naturali:

> **Salviati** - [...] Se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?
>
> **Simplicio** - Non si può dire altrimenti.

Considera la corrispondenza ***K*** che ad ogni naturale associa il suo quadrato;
Completa:

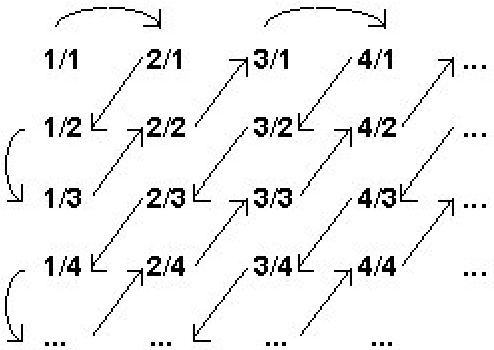
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….
K	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N^2										

(abbiamo indicato con N^2 l’insieme dei quadrati)

Qual è l’immagine di 5? ……….
Di quale naturale è immagine 121? …………………
K è una corrispondenza biunivoca tra **N** e $\mathbf{N^2}$? …………..
È vero che $\mathbf{N^2}$ è un sottoinsieme proprio di **N**? ………
Quale conclusione puoi trarre ? ……………………..

DEFINIZIONE. Un **insieme** X si dice **numerabile** quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra esso e l’insieme N dei naturali.

Dagli esempi precedenti e dagli esercizi svolti, possiamo concludere che l’insieme N, l’insieme P dei pari, l’insieme N^2 dei quadrati, l’insieme Z degli interi, sono **insiemi numerabili**, hanno dunque tutti la stessa cardinalità.
Ma quale valore possiamo attribuire alla cardinalità degli insiemi sopra elencati se essi sono infiniti?
La **cardinalità** dell’insieme dei numeri naturali viene indicata da Cantor con il simbolo $\aleph_0$ (si tratta della prima lettera dell’alfabeto ebraico con l’indice 0 e si legge **aleph con 0**).
Nel 1874, attraverso un procedimento detto "diagonalizzazione", Cantor dimostra che anche **l’insieme Q dei numeri razionali è numerabile**. Vediamo come possiamo ripercorrere la dimostrazione di questo fatto.
Ricordiamo che ogni numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione e che frazioni equivalenti sono lo stesso numero razionale. Costruiamo la seguente tabella delle frazioni, infinite righe e infinite colonne: nella prima colonna tutte la frazioni con numeratore 1, nella seconda quelle con numeratore 2 e così via. Attribuiamo ai suoi elementi l’ordinamento indicato dalle frecce; esso ci permette di costruire una corrispondenza biunivoca tra le frazioni positive e N; anzi considerando solamente quelle ridotte ai minimi termini, che rappresentano il numero razionale assoluto, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra Q_A e N nel modo seguente:



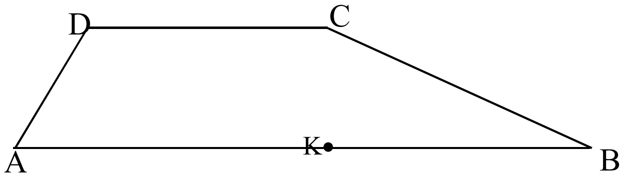
Q_A	1/1	2/1	1/2	1/3	3/1	4/1	3/2	2/3	1/4	….
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….

Cantor nel 1874 enunciò il seguente teorema.

TEOREMA. Non c’è corrispondenza biunivoca tra l’insieme R dei numeri reali e l’insieme N.

determinando un altro tipo di infinito la cui cardinalità denotò con il simbolo $\aleph_1$
Noi tralasciamo la dimostrazione del teorema sopra enunciato per la sua complessità e la incontrerete nel corso degli studi superiori; qui abbiamo voluto mostrarvi che vi sono diversi gradi di infinito e che di fronte ad insiemi “infiniti” non possiamo affermare che “la parte è minore del tutto”. A questo proposito vi proponiamo il seguente esercizio.

212 Prolungate i lati obliqui del trapezio ABCD fino ad incontrarsi nel punto O.
Le semirette di origine O e comprese tra OA e OB, proiettano il segmento DC nel segmento AB, facendo corrispondere ad un punto di DC un punto di AB.
Direste Vera o Falsa l'affermazione: "I punti del segmento DC sono tanti quanti quelli del segmento AB" ? ……………



Seguite questi passaggi rispondendo ai quesiti

1. Quale punto corrisponde a D, e quale a C? ………………….
2. Ogni punto di CD trova un corrispondente punto in AB? …………………
3. Di quale punto è immagine il punto K di AB? ……………….
4. Ogni punto di AB è immagine di un solo punto di CD? ………………….
5. La proiezione costruita stabilisce una corrispondenza biunivoca tra CD e AB ? …………
6. A quale conclusione vi ha condotto questo esercizio? …………………..

213 Dati gli insiemi
$A=\{x : x=2n^2-1 \text{ con } n\in N \text{ e } 0\le n<2\};\quad B=\{y\in Z:\ -1\le y\le 1\}$ è vero che si possono mettere in corrispondenza biunivoca?

214 Dato l'insieme $K=\{a,b,c,d\}$, costruite l'insieme $K\times K$.
Considerate il suo sottoinsieme $H=\{(x,y): x \text{ precede } y \text{ nell' ordine alfabetico}\}$
È vero che tale insieme è equipotente all'insieme formato dalle facce di un cubo?

215 Attraverso la costruzione di un grafo sagittale, attribuite il valore di verità alla proposizione: "Il sottoinsieme T di **NxN** formato dalle coppie i cui elementi danno come somma 3 è equipotente all'insieme F dei divisori di 14."

216 Attribuite il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) un insieme infinito è numerabile V F
b) un insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio V F
c) la cardinalità dell'insieme Q è maggiore di quella dell'insieme Z V F
d) due insiemi equipotenti sono infiniti V F

217 Considerate l'insieme $P^*=\{2^n \text{ con } n\in\mathbb{N}\}$ delle potenze di 2,

1. Completate la tabella sottostante:

n	0	1											
potenza													

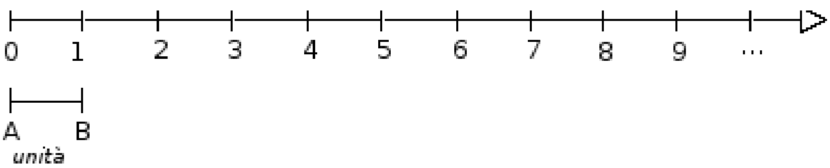
2. Quali proposizioni tra quelle assegnate sono vere?
   p1: P* è un sottoinsieme di N
   p2: 0 appartiene a P*
   p3: P* è numerabile
   p4: Nessun elemento di P* è maggiore di 2065438

[A] solo la p1 [B] la p1 e la p3 [C] la p1, la p2 e la p3 [D] tutte e quattro

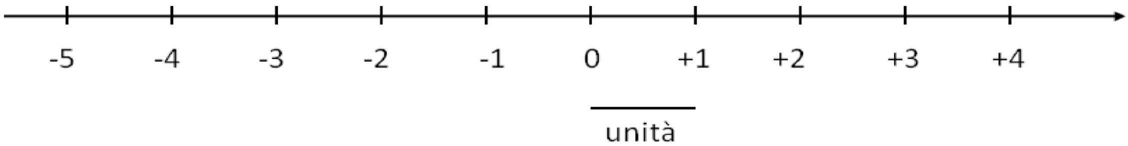
3. Quali considerazioni potete fare sull'infinità di P*?

►5. La retta e gli insiemi numerici

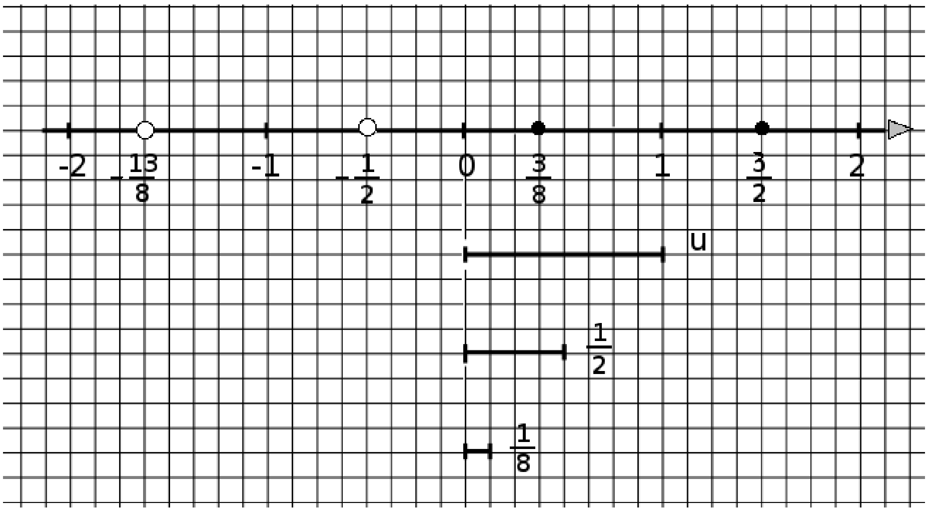
Nello studio degli insiemi numerici avete visto come si possono depositare su una semiretta i numeri naturali; la legge costruttiva di questa rappresentazione genera tra l'insieme N = {0, 1, 2, 3, 4, …. } e i punti della semiretta una corrispondenza avente come dominio N e come codominio i punti della semiretta. Ad ogni numero naturale possiamo far corrispondere un punto della semiretta, ma **non tutti i punti della semiretta sono immagine di un numero naturale**: l'insieme **IM**magine **non coincide con** il **C**odominio e **la corrispondenza non è biunivoca.**



Lo stesso fatto avviene se consideriamo l'insieme Z come Dominio e i punti di una retta orientata come Codominio; nella figura viene rappresentata la corrispondenza generata con la legge costruttiva già enunciata nel capitolo dei numeri interi.



Ad ogni numero intero possiamo far corrispondere un punto della retta orientata, ma **non tutti i punti della retta sono immagine di un numero intero**: l'insieme **IM**magine **non coincide con** il **C**odominio e **la corrispondenza non è biunivoca.**
Abbiamo già visto nel punto precedente che N e Z sono due insiemi infiniti con la stessa cardinalità e la loro caratteristica comune è che tra due naturali consecutivi o tra due interi consecutivi non possiamo trovarne un altro. Si dice che **N e Z sono** due **insiemi discreti**.
Consideriamo ora l'insieme **Q** dei numeri razionali; sappiamo che anche questi numeri, rappresentati da frazioni, possono essere depositati su una retta orientata come mostrato nella figura sottostante

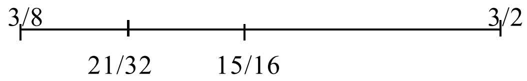


Esempi di rappresentazione di numeri razionali sulla retta orientata.

Sappiamo che **Q è** equipotente all'insieme **Z**, ma rispetto ad esso presenta un'altra caratteristica: esso è **denso**, ciò tra due numeri razionali ci sono infiniti altri numeri razionali.
Come possiamo confermare questa affermazione?

Osserviamo la figura precedente: fra 3/8 e 3/2 si trova certamente il numero 1. Costruiamo il numero $q=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\right)$ ottenuto dividendo per due la somma dei due numeri estremi dell'intervallo considerato e si ottiene $q=\frac{15}{16}$ che è minore di 1 e a maggior ragione minore di $\frac{3}{2}$, ma maggiore di $\frac{3}{8}$, come puoi verificare trasformando la frazione in una equivalente con denominatore 16.

Con lo stesso procedimento possiamo determinare $q_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{15}{16}\right)=\frac{21}{32}$ che risulta maggiore di $\frac{3}{8}$ e minore di q. Con questo procedimento, che non ha mai termine, possiamo determinare infiniti altri numeri razionali compresi tra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$.



Questa possibilità ci fa supporre che tutti i punti della retta orientata possano essere immagine di un numero razionale, cioè che esista una corrispondenza biunivoca tra l'insieme **Q** e i punti della retta.
Invece, no! Nel capitolo "Insiemi Numerici-introduzione ai numeri reali" abbiamo visto che benché l'insieme **Q** sia infinito e denso, quando pensiamo di aver disposto sull'asse dei numeri tutti i suoi elementi rimangono sulla retta ancora altri punti liberi. La retta geometrica sembra avere "più punti" di quanti siano i numeri razionali: gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali.
L'insieme che si ottiene dall'**unione dell'insieme Q** con l'**insieme J degli irrazionali** è l'**insieme R dei numeri reali**, cui Cantor attribuì cardinalità $\aleph_1$. La retta geometrica orientata è in corrispondenza biunivoca con **R,** il che vuol dire che ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta orientata e un punto della retta è immagine di un solo numero reale, razionale o irrazionale.

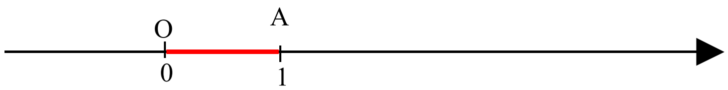
DEFINIZIONE. Si chiama **ascissa di un punto sulla retta reale** il numero reale α che è la sua immagine nella corrispondenza biunivoca.

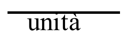
<u>Esempio</u>

Determinare l'immagine del numero reale $\alpha=1+\sqrt{2}$ *sulla retta reale.*

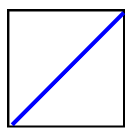
Soluzione:

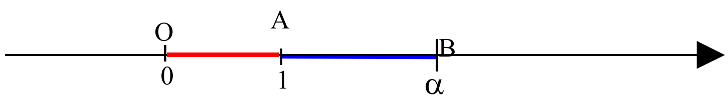
Fisso la retta orientata e un suo punto O al quale attribuisco ascissa 0; fisso un segmento arbitrario come unità di misura e quindi determino il punto A di ascissa 1 riportando il segmento unitario a partire da O, nel verso indicato dalla freccia.





Costruisco il segmento rappresentativo del numero irrazionale $\sqrt{2}$, che è la diagonale del quadrato di lato l'unità (vedi C1_p4). Metto questo segmento adiacente al segmento OA, come in figura:

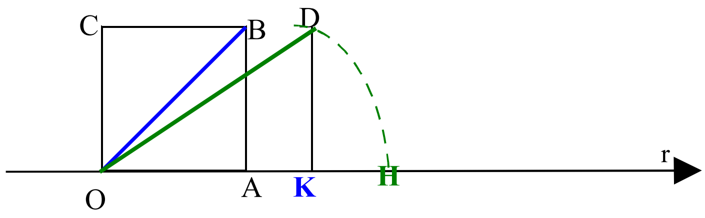




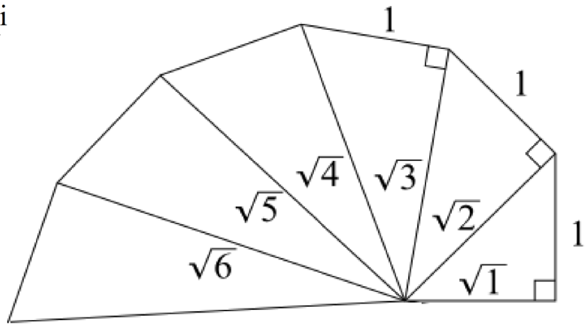
Il punto B è l'immagine del numero α, e scriviamo B(α)

Sulla retta razionale si possono collocare tutti i numeri del tipo $\sqrt{n}$ con $n\in\mathbb{N}_0$.

Nella figura è segnato il punto **K** immagine del numero $\sqrt{2}$; sulla perpendicolare alla retta r nel punto K prendiamo il segmento KD = OA e congiungiamo D con O. Per il teorema di Pitagora sul triangolo OKD si ha $\overline{OD}^2=\overline{OK}^2+\overline{KD}^2=\overline{OK}^2+\overline{OA}^2$ e passando alle misure $\overline{OD}^2=(\sqrt{2})^2+1^2=2+1=3$ pertanto $\overline{OD}=\sqrt{3}$; puntando il compasso in O con raggio OD tracciamo l'arco che incontra la retta r in **H** immagine del numero irrazionale $\sqrt{3}$.



Proseguendo in questo modo possiamo ottenere sulla retta razionale i punti associati ai numeri del tipo $\sqrt{n}$.



Un'altra classica costruzione, nota come "spirale di Teodoro", permette di ottenere i segmenti di misura $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}_0$.
Si inizia con la costruzione del triangolo rettangolo isoscele di cateto 1; sappiamo già che la sua ipotenusa è il segmento di misura $\sqrt{2}$. Sulla perpendicolare in C ad AC si prende il segmento CD di misura 1: applicando il teorema di Pitagora come abbiamo fatto sopra, otteniamo $\overline{AD}=\sqrt{3}$. Ripetiamo la costruzione dal vertice D e otteniamo il triangolo rettangolo ADE la cui ipotenusa è $\overline{AE}=\sqrt{4}$ e poi $\overline{AF}=\sqrt{5}$ e così via.

218 Determinate sulla retta reale i punti immagine dei seguenti numeri reali:
$\alpha=\frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\beta=\frac{2}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\delta=-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; $\lambda=\sqrt{3}-3$

219 Verificate che il numero $\chi=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ non è uguale al numero $\omega=\sqrt{5}$, usando la rappresentazione sulla retta orientata.

220 Il segmento qui accanto è la diagonale del quadrato di lato unitario:
Determinate sulla retta reale il punto immagine di +1 e di –1.

221 Stabilite il valore di verità della proposizione: "poiché tra 2 e 3 non vi è nessun altro numero naturale, anche tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non vi è nessun numero reale".

►6. Funzioni o applicazioni

Diamo la seguente definizione

DEFINIZIONE. Una **corrispondenza univoca** tra due insiemi A e B non vuoti si chiama **funzione o applicazione di A in B** se e solo se **Dominio = Insieme di Definizione = A .**

Esempio

Analizziamo le corrispondenze sotto rappresentate con grafico sagittale:

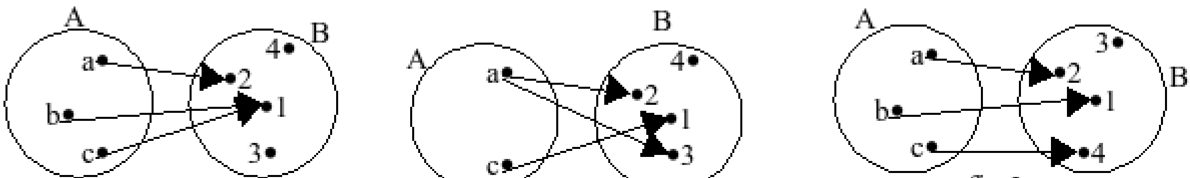


fig.1 fig.2 fig.3

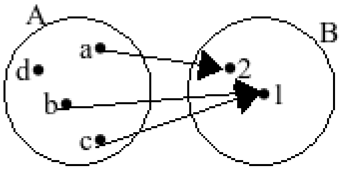


fig.4

Le corrispondenze di fig.1 e fig.3 rappresentano una funzione; in fig.2 non è rappresentata una funzione non essendo una corrispondenza univoca; in fig.4 il **D**ominio non coincide con l'insieme A, quindi non si ha una funzione.
I termini funzione o applicazione sono sinonimi, tuttavia si preferisce usare il termine "funzione" quando i due insiemi A e B sono insiemi numerici. Solitamente una funzione viene indicata con la lettera ***f*** e si intende la legge che **associa ad ogni elemento x di A uno e un solo elemento y di B**.
Per indicare la legge che fa passare dall'insieme A all'insieme B usiamo la scrittura

$$f: A \rightarrow B \quad oppure \quad A \xrightarrow{f} B$$

DEFINIZIONI
L'elemento **y** di B, corrispondente di un elemento x del **D**ominio, viene detto **immagine di x nella funzione *f*** e si scrive **y = *f*(x)** che si legge *"y uguale effe di x"*.
Il sottoinsieme proprio o improprio di B formato dagli elementi che sono immagini degli elementi del **D**ominio si chiama **Codominio o insieme IMmagine** e si scrive **C = IM = *f*(D).** Osserviamo che non necessariamente ogni elemento di B è immagine di un elemento del dominio per cui $C \subseteq B$.

222 Per le funzioni rappresentate nell'esempio precedente, completa:
fig.1 : D = ID = {………} ; C = IM = {……..} ; f(a) = …….. ;
fig.3 : D = ID = {………} ; C = IM = {……..} ; f(….) = 4 ;

223 È vero che la corrispondenza che associa ad ogni regione italiana il suo capoluogo di provincia è una funzione?
1. Completa: D = ID = …………………….
2. È vero che IM = { città d'Italia}? …………………………………
3. Completa f(Liguria) = ………………….; f(…………..) = Cagliari?

224 Assegnati gli insiemi A={mare, ruspa, fegato, generale} e B={1,2,3,4,5,6,7,8,9} la corrispondenza che associa ad ogni elemento di A il numero di lettere di cui è composta la parola è una funzione?
1. Rappresentala con grafico sagittale e stabilisci l'insieme IMmagine
2. Quale relazione sussiste tra B e IM?

Funzioni iniettive – suriettive - biunivoche

Esempio
Nella figure sottostanti sono rappresentate funzioni:

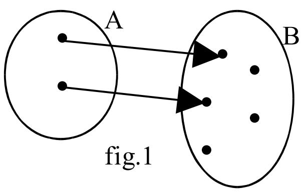


fig.1

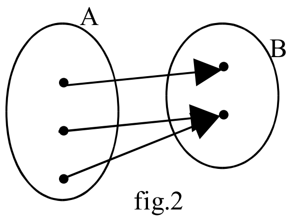


fig.2

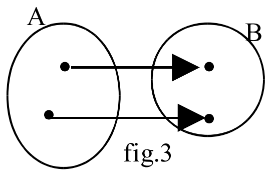


fig.3

In fig.1 si ha $IM \subset B$, elementi distinti del Dominio A hanno immagini distinte in B
In fig.2 si ha IM = B , ma elementi distinti di A hanno la stessa immagine in B
In fig.3 si ha IM = B e elementi distinti del Dominio A hanno immagini distinte in B

I tre esempi ci illustrano tre tipi diversi di funzioni:

DEFINIZIONI
Si dice **iniettiva** una funzione in cui elementi distinti del Dominio hanno immagini distinte in B: **per qualunque x_1, x_2 di A con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.**
Si dice **suriettiva** una funzione in cui **IM = B.**
Si dice **biunivoca o biiettiva** una funzione che sia **contemporaneamente iniettiva e suriettiva.**

Pertanto in fig.1 è rappresentata una funzione iniettiva, in fig.2 una funzione suriettiva e in fig.3 una funzione biunivoca.

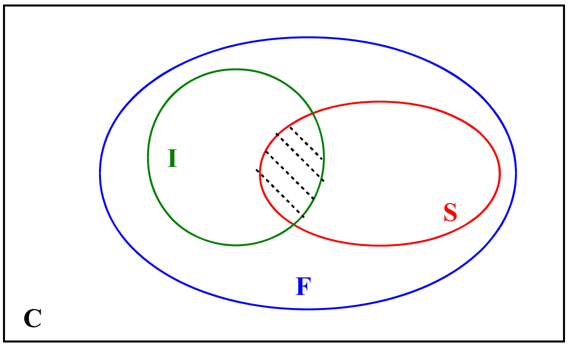
225 Tra le funzioni rappresentate nell'esempio precedente ce n'è una iniettiva? Classifica le altre.

226 Si è ammessi alla facoltà U se nel test d'ingresso si è avuto un punteggio compreso tra 60 incluso e 100 incluso. La corrispondenza che associa ad ogni studente che ha superato il test il suo punteggio è una funzione? Se rispondi affermativamente, sai dire di che tipo è la funzione?

227 Spiega perché la funzione che associa a ciascuna persona il suo codice fiscale è biunivoca.

Riportiamo un diagramma riepilogativo sui diversi tipi di corrispondenze:

Legenda:
C insieme delle corrispondenze
F insieme delle funzioni
S insieme delle funzioni suriettive
I insieme delle funzioni iniettive
$I \cap S$ insieme delle funzioni biunivoche

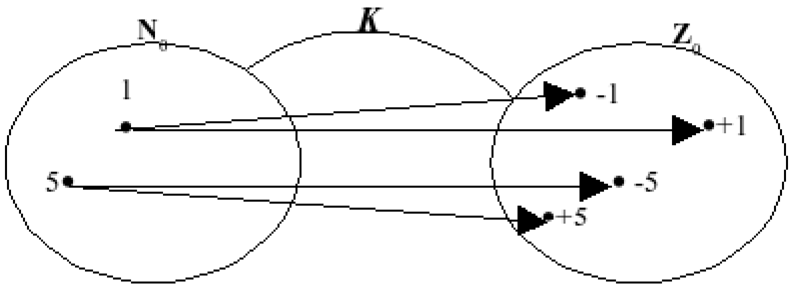


Funzioni tra insiemi numerici

Analizziamo alcune corrispondenze definite tra gli insiemi numerici. In questo caso la funzione ***f*** può essere espressa tramite una formula o scrittura analitica, una tabella, un algoritmo, oppure semplicemente con linguaggio comune, purché in modo preciso e inequivocabile. Il generico elemento **x** del dominio si chiama **variabile indipendente**; il corrispondente elemento **y = *f*(x)** si chiama **variabile dipendente**.

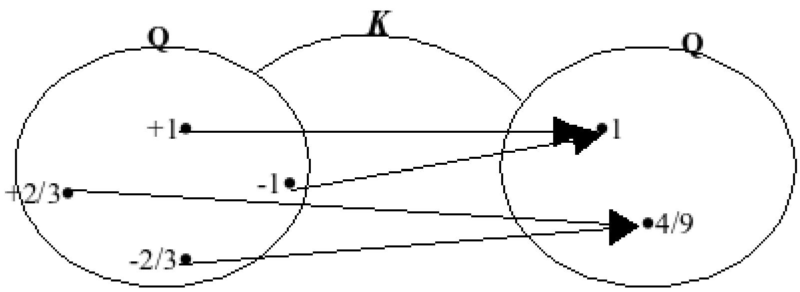
Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K***: **"essere il valore assoluto"** tra l'insieme N_0 dei naturali diversi da zero e l'insieme Z_0 degli interi relativi diversi da zero. Questa corrispondenza **non è una funzione** in quanto **non è** una corrispondenza **univoca**: un elemento di N_0 ha due immagini poiché ogni numero naturale è valore assoluto di due interi opposti, come rappresentato dal grafico sottostante:



Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K*** che **associa ad ogni numero razionale il suo quadrato**. Essa è una funzione di **D**ominio **Q**: di ogni numero razionale si può determinare il quadrato che è unico; poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato la funzione in esame **non** è **iniettiva**, come rappresentato dal grafico sottostante:



L'immagine y di ogni x appartenente a Q è il suo quadrato: in simboli matematici scriviamo la funzione tramite una formula ***f:*** $y = x^2$.

Per quanto riguarda l'insieme **IM**magine o Codominio della funzione esso è un sottoinsieme proprio di **Q**: il numero razionale $+\frac{3}{4}$ non è quadrato di nessun razionale e neppure -25, razionale negativo, è quadrato di un numero razionale, quindi $\Im \subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, pertanto la funzione **non** è **suriettiva**

Esempio

Analizziamo la corrispondenza che **associa ad ogni intero il suo valore assoluto**.
Sappiamo che il valore assoluto di un intero è un numero naturale, e ogni intero ha un solo valore assoluto. La corrispondenza è univoca e il dominio coincide con l'insieme Z, pertanto è una funzione:
f: Z → N rappresentata in forma analitica con $y=|x|$ con $x\in\mathbb{Z}$ e $y=f(x)\in\mathbb{N}$.

$x\in\mathbb{Z}$	0	+1	-1	-2	+2	+3	-3	.....
$y\in\mathbb{N}$	0	1	1	2	2	3	3	.....

Nella tabella sono rappresentati alcuni elementi del **D**ominio con le rispettive immagini: da cui si deduce che tale funzione **non** è **iniettiva**

228 Con riferimento all'esempio precedente, è vero che scelto un qualunque numero naturale è possibile determinare almeno un numero intero di cui è immagine? Completate: f(…….) = 45
L'osservazione precedente permette di concludere che tale funzione è suriettiva?
Fate la rappresentazione sagittale della funzione.

Esempio

È assegnata la funzione $f: x\in N \rightarrow (x-2)\in Z$. In questo caso la funzione associa ad ogni numero naturale il numero intero ottenuto da quello sottraendo 2. L' espressione analitica della funzione è ***f***: y = x – 2 e la legge così espressa si può descrivere anche attraverso una tabella

$x\in\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$(x-2)\in\mathbb{Z}$	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	....

Ogni elemento dell'insieme N trova il corrispondente in Z; elementi diversi del dominio hanno immagini diverse pertanto la funzione è **iniettiva**; il Codominio o insieme IMmagine è un sottoinsieme proprio di Z e precisamente **C = IM =** $\{y\in\mathbb{Z} / y\geq -2\}$, pertanto la funzione **non** è **suriettiva**.

Esempio

Analizziamo la corrispondenza: $f_1: x\in N \rightarrow (x-2)\in N$ costruendo la relativa tabella:

$x\in\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$(x-2)\in\mathbb{N}$			0	1	2	3	4	....

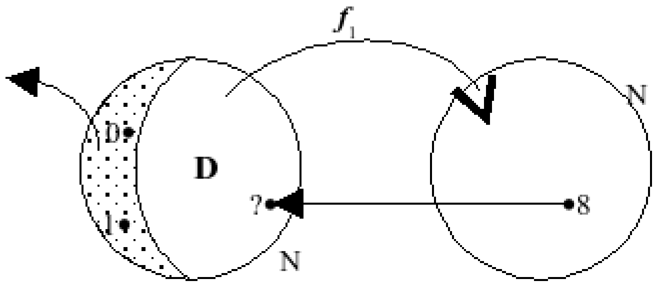
Vediamo che né 0 né 1 hanno l'immagine nella corrispondenza assegnata.

Fissiamo allora come Dominio un sottoinsieme di N e precisamente **D = ID = N – {0,1}**; e procediamo nell'analisi della funzione $f_1: y=x-2$;

229 Completa l'analisi della funzione

1. elementi diversi del **D**ominio hanno immagini diverse, quindi tale funzione è **iniettiva**; si ha anche **C = IM = N** e pertanto la funzione è **suriettiva**, quindi …………
2. Preso y = 8 sapresti trovare l'elemento del **D**ominio di cui è immagine? …………

Completa con l'ultimo risultato trovato la rappresentazione in forma sagittale della funzione.



Il dominio è stato ottenuto con una restrizione dell'insieme N

Esempio

Consideriamo la corrispondenza che **associa ad ogni numero razionale il suo inverso** (o reciproco).
Sappiamo che "fare l'inverso" di un numero razionale x significa scrivere il numero razionale $\frac{1}{x}$, ma questa operazione ha significato solo se x è diverso da 0; operiamo dunque una restrizione su Q e fissiamo **D = ID = Q_0** La corrispondenza è una funzione tra **Q_0** e **Q**. In simboli matematici ***f:*** $y=\frac{1}{x}$

230 Stabilite se la funzione ***f:*** $y=\frac{1}{x}$ è iniettiva. Nell'insieme **IM**magine c'è lo zero?

Completate **C = IM = ………**

Completate la tabella

$x \in \mathbb{Q}_0$	-2	-7/8	+1				-1	
$y \in \mathbb{Q}_0$				+1/3	-12/5	-7/8		-1

231 Consideriamo la funzione ***f*** che **associa ad ogni numero razionale il suo triplo**.

$Q \xrightarrow{f} Q$ la sua espressione in forma analitica è ***f***: y = ………

Dominio = **ID** = **Q;** possiamo moltiplicare per 3 qualunque numero razionale.
Codominio = **IM** = **Q;** infatti il triplo di un numero razionale è ancora un numero razionale.
Rispondete:

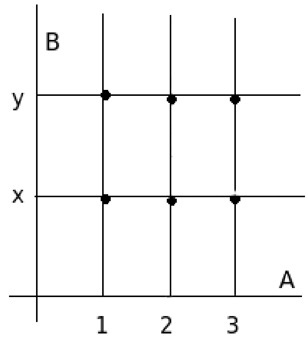
1. Qual è l'immagine di 0? ……………………………….
2. Quale elemento del dominio ha per immagine 5? ………………………………..
3. È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? ……………………….
4. È vero che –1 è immagine di –3? ……………………………….
5. La funzione è iniettiva?
6. È biunivoca?

Fai il grafo sagittale della funzione.

6. Rappresentazione grafica di funzioni

►1. Punti del piano e coppie di numeri reali

Ricordiamo che abbiamo definito **prodotto cartesiano** di due insiemi non vuoti A e B l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartenga ad A e il secondo a B. Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A\times B=\{(a\,;b)|a\in A \text{ e } b\in B\}$.



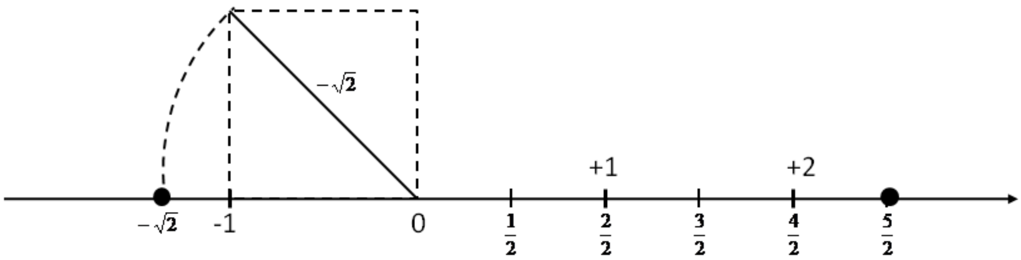
Esempio

Il prodotto cartesiano dei due insiemi A={1,2,3} e B={x,y} è AxB = {(1;x), (1;y), (2;x), (2;y), (3;x), (3;y)} e graficamente si può rappresentare con un diagramma cartesiano come nella figura accanto.

Sappiamo che una retta orientata, fissata una unità di misura arbitraria, è l'immagine geometrica dell'insieme dei numeri reali: ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e un qualunque punto della retta è immagine di un solo numero reale. (vedi il paragrafo "corrispondenza tra insiemi")

Esempio

Al numero reale $\delta=\frac{5}{2}$ corrisponde il punto P; Q è l'immagine del numero reale $\alpha=-\sqrt{2}$



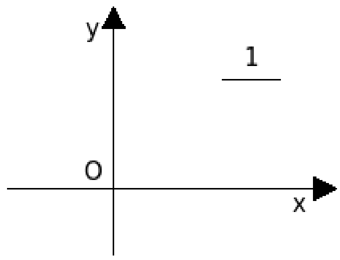
Introduzione al sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Preso l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, costruiamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: esso è costituito dall'insieme delle coppie ordinate tali che il primo elemento sia un numero reale come pure il secondo elemento. In $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avremo coppie il cui primo elemento è 0, coppie il cui primo elemento è un numero positivo e infine coppie il cui primo elemento è un numero negativo, coppie che possiamo sinteticamente rappresentare nel seguente modo:

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ = {(0;0), (0;+), (0;-), (+;0), (+;+), (+;-), (-;0), (-;+), (-;-) }

È possibile dare una rappresentazione grafica di questo insieme di infiniti elementi?

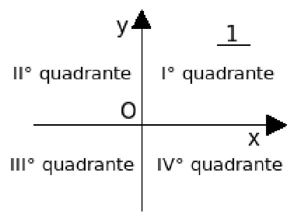
Consideriamo sul piano una coppia di rette perpendicolari, indichiamo con O il loro punto di intersezione, fissiamo convenzionalmente un verso di percorrenza su ciascuna retta (convenzionalmente sull'orizzontale da sinistra a destra, sulla verticale dal basso all'alto) e infine scegliamo un segmento arbitrario come unità di misura.



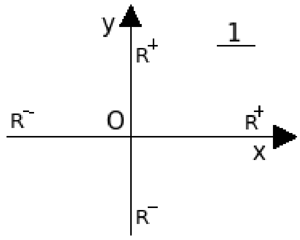
Indichiamo con **x** l'asse orizzontale che chiamiamo **asse delle ascisse** e con **y** l'asse verticale che chiamiamo **asse delle ordinate**.

DEFINIZIONE. Si chiama **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia di rette orientate, perpendicolari, dotate di unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura.



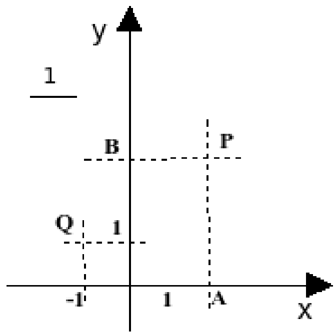
Ogni punto dell'asse delle ascisse è immagine di un numero reale:
O è immagine di zero, i punti alla sua destra rappresentano i numeri reali positivi, quelli alla sua sinistra tutti i numeri reali negativi; analogamente sull'asse delle ordinate il punto O è immagine dello zero, sopra di questo si collocano i numeri positivi e sotto i numeri negativi.



Per rappresentare gli elementi di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cioè le coppie ordinate di numeri reali (α;β) procediamo nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale α;
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y;
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale β;
- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

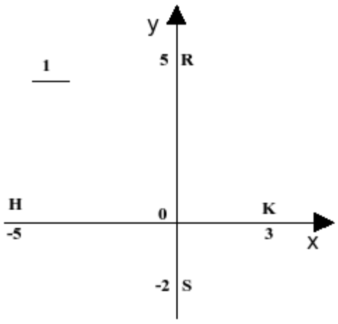
Il punto P, intersezione delle parallele tracciate, è l'immagine della coppia ordinata (α;β).



Esempio

Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate (2;3) e (-1;1)
Nella figura accanto è tracciata la costruzione descritta sopra: P è il punto del piano immagine della coppia (2;3) e Q è il punto immagine della coppia (-1;1).

232 Prova tu, rappresentando le coppie (4;-1) e (-4;1).
Quali punti rappresentano le coppie con un elemento uguale a zero?



Esempio

Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: (0;5) , (0;-2) , (-5;0) , (3;0)
Osserviamo che il punto A immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia (0;5) sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia (0;-2) al punto S dello stesso asse. Analogamente, poiché il punto B immagine dello zero sull'asse y coincide con O, le coppie (-5;0) e (3;0) sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

Il punto **O** è immagine della coppia (0;0) ed è chiamato **Origine**.

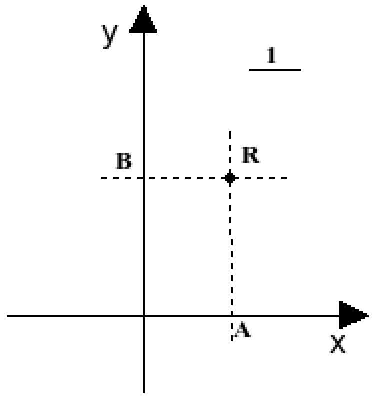
Prima conclusione: ogni coppia di numeri reali è rappresentata da un punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

233 Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse:

$(0;-1)$ $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$ $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{3};1\right)$

$\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ $(-8;9)$ $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$ $(-1;0)$

Completa l'osservazione conclusiva:
"Tutte le coppie del tipo (+;+) individuano punti del ………..…...……"
"Tutte le coppie del tipo (..;..) individuano punti del IV° quadrante"
"Tutte le coppie del tipo (-;+) individuano punti del …………......………"
"Tutte le coppie del tipo (-;-) individuano punti del ………....…………"
"Tutte le coppie del tipo (…;0) individuano punti del ………...………"
"Tutte le coppie del tipo (…;…) individuano punti dell'asse y"



Prendiamo ora un punto R del piano sul quale sia stato fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e tracciamo da R la parallela all'asse y che interseca l'asse x nel punto A. A questo punto è associato un numero reale α. Analogamente da R tracciamo la parallela all'asse x che interseca l'asse y nel punto B immagine di un numero reale β. Al punto R associamo la coppia di numeri reali (α;β).

Diremo che **R è il punto di coordinate (α;β)**, α si chiama **ascissa** del punto R, β **ordinata** del punto R.

Seconda conclusione: ogni punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico individua una coppia ordinata di numeri reali.

In conclusione, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e l'insieme dei punti del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Possiamo dunque "confondere" coppia di numeri reali con punto del piano e anzi diremo, secondo gli esempi precedenti, "P è il punto (2;3), Q il punto (-1;1)" invece di "P è il punto immagine della coppia (2;3)" o "P è il punto di coordinate (2;3)".

Un po' di storia
Nel II° secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine.
La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri.
Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre.
I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.
Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri divenne un procedimento matematico per descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti algebrici.
La geometria analitica tratta questioni geometriche con metodi di tipo algebrico.

Distanza di due punti

Assegnato nel riferimento cartesiano ortogonale il punto $P(\alpha;\beta)$, il numero reale $|\alpha|$ rappresenta la misura della distanza del punto dall'asse y e il numero reale $|\beta|$ rappresenta la misura della distanza di P dall'asse x.

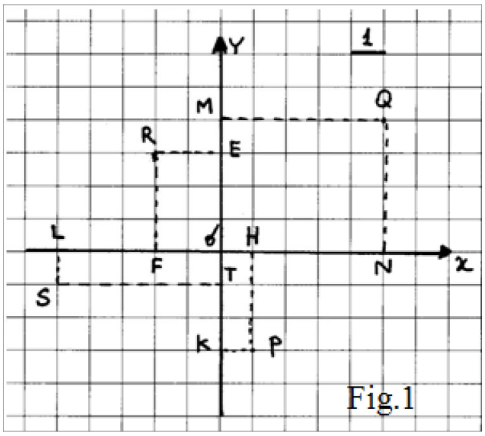


Fig.1

Esempio

Determinare la misura della distanza dagli assi coordinati dei punti P(+1;-3) , Q(+5;+5) , R(-2;+3) , S(-5;-1).
Dati: P(+1;-3)
Obiettivo:
$PH \perp \text{asse } X$; il segmento PH è la distanza di P dall'asse x.
$PK \perp \text{asse } y$; il segmento PK è la distanza di P dall'asse y.
Per quanto detto sopra si ha
$\overline{PH}=|-3|=-(-3)=3 \quad \overline{PH}=|+1|=1$
Completate la soluzione dell'esempio, seguendo la traccia.

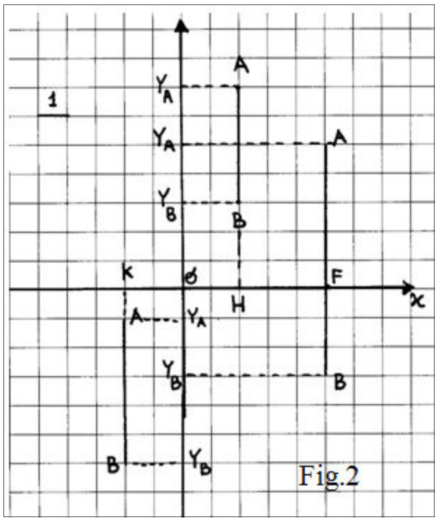


Fig.2

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, inserito in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxy, conoscendo le coordinate degli estremi A e B del segmento stesso.
I° caso: i due punti hanno la stessa ascissa: il segmento AB è parallelo all'asse y e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse x.
Dati: A(2;7) , B(2;3) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva: $\overline{AB}=\overline{AH}-\overline{BH}=y_A-y_B=7-3=4$
Dati: A(5;5) , B(5;-3) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva:
$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=y_A+(-y_B)=y_A-y_B=5-(-3)=8$
Dati: A(-2;-1) , B(-2;-6) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva:
$\overline{AB}=\overline{BK}-\overline{AK}=-(y_B)-(-y_A)=y_A-y_B=-1+6=5$

Osserviamo che in ogni caso abbiamo sottratto dall'ordinata maggiore l'ordinata minore; generalizzando possiamo concludere:
La misura del segmento AB parallelo all'asse delle ordinate è $\overline{AB}=|x_a-x_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ordinata maggiore.

234 Sono assegnati i punti A(3;-1) , B(3;5) , M(-1;-1) , N(-1;-7). È vero che $\overline{AB} = \overline{MN}$?

II° caso: i due punti hanno la stessa ordinata: il segmento AB è parallelo all'asse x e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse y. (Fig.3)
Seguendo il procedimento applicato nel primo caso, dopo aver rilevato le coordinate degli estremi del segmento AB nella figura accanto, verifica che in ogni caso $\overline{AB} = |x_A - x_B|$
La misura del segmento AB parallelo all'asse delle ascisse è $\overline{AB} = |x_A - x_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ascissa maggiore.

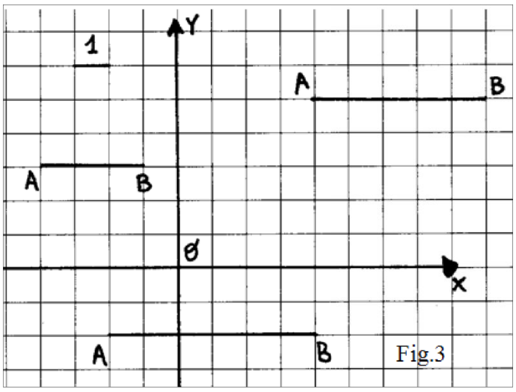


Fig.3

235 Sono assegnati i punti A(1;5) , B(-4;5) , C(-4;-2) , D(5;-2).
Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinate l'area del quadrilatero ABCD.

236 Determinate l'area del quadrilatero MNPQ sapendo che M(6;-4) , N(8;3) , P(6;5) , Q(4;3).

III° caso: è questo il caso generale: il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati. (Fig.4)
Dati: $A(x_A ; x_B), B(x_B ; y_B)$ Obiettivo: $? \overline{AB}$
Tracciando da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y si determina il vertice C del triangolo rettangolo ABC di cui AB è l'ipotenusa.
Per il teorema di Pitagora si ottiene:
$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_B)^2}$
Poiché $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$ sostituendo si ha:
$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

La misura del segmento AB, note le coordinate dei suoi estremi è $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ **.**

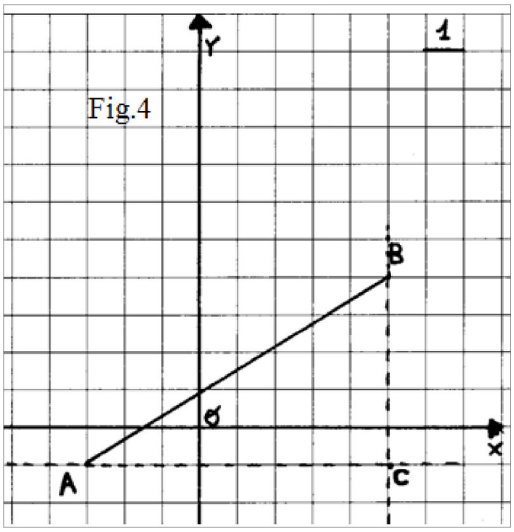


Fig.4

237 Determina $\overline{AB}$ sapendo che A(7;-1) e B(-3;-6).

238 Determina la distanza di $P(-3 ; 2{,}5)$ dall'origine del riferimento.

239 Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici $A(3 ; -2)$, $B(4 ; 1)$, $C(7 ; -4)$.

240 Determina il perimetro del quadrilatero di vertici A(1;5) , B(-4;5) , C(-4;-2) , D(5;-2).

241 Determina il perimetro del quadrilatero di vertici M(6;-4) , N(8;3) , P(6;5) , Q(4;3).

242 Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici A(1;-3), B(4;3), C(-3;1), D(-6;-5).

243 Verifica che il triangolo di vertici E(4;3) , F(-1;4) , G(3;-2) è isoscele.

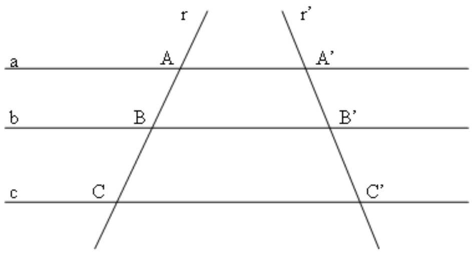
244 Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x; il vertice B ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice C segue B e $\overline{BC} = \frac{17}{2}$. Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro sapendo che il terzo vertice è $A(-1 ; 5)$.

245 I punti $F(3 ; 0)$, $O(0 ; 0)$, $C(0 ; 5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area la misura delle sue diagonali.

246 Il punto G appartiene all'asse x, ha ascissa maggiore all'ascissa di F ed è tale che $\overline{EF} = \overline{FG}$.
Determina il perimetro del trapezio OGEC.

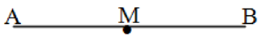
Punto medio di un segmento

Ricordiamo il teorema di Talete: "in un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale". Cioè, se $AB \equiv BC$ allora $A'B' \equiv B'C'$



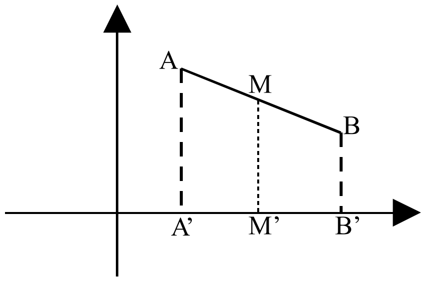
Richiamiamo anche la definizione di punto medio di un segmento: il punto medio di un segmento AB è il punto interno al segmento che lo divide in due parti congruenti:

$AM \equiv MB.$



Vogliamo ora affrontare il seguente problema: conoscendo le coordinate degli estremi A e B di un segmento determiniamo le coordinate del suo punto medio.

Dati:	Obiettivo
$A(x_A; y_A)$	? $M(x_M; y_M)$
$B(x_B; y_B)$	
$AM \equiv MB$	



Strategia: essendo $AM \equiv MB.$ per il teorema di Talete $A'M' \equiv M'B'.$; si ha inoltre $A'(x_A; 0)$, $B'(x_B; 0)$, $M'(x_M; 0)$ e quindi $x_M - x_A = x_B - x_M$ da cui $2x_M = x_A + x_B$ e dunque $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Con ragionamento analogo tracciando dai punti A, B, M le parallele all'asse x si ricava $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Le coordinate del punto medio M di un segmento AB, con $A(x_A; x_B), B(x_B; y_B)$ **sono** $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ **e** $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ **.**

Esempio

Determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A\left(-\dfrac{3}{4}; 1\right)$, $B\left(2; -\dfrac{1}{2}\right)$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{4} + 2}{2} = \frac{5}{8}; \quad y_M = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{quindi} \quad M\left(\frac{5}{8}; \frac{1}{4}\right)$$

247 Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2}; 0), B(0; \sqrt{2})$

b) $A\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right), B\left(-\dfrac{1}{6}; 3\right)$

c) $A(-1; 4), B(1; -4)$

d) $A\left(0; -\dfrac{3}{2}\right), B(-2; -1)$

e) $A\left(1+\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right); B\left(-\sqrt{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

f) $A\left(\dfrac{7}{5}; -\dfrac{7}{5}\right), B(1; -1)$

g) $A\left(-3; \dfrac{1}{2}\right), B\left(\dfrac{1}{2}; -3\right)$

248 I vertici del triangolo ABC sono i punti $A\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{6}; 1\right)$, $C\left(\dfrac{4}{3}; 0\right)$, determina le coordinate dei punti M, N, P , punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC.

249 I vertici del triangolo ABC sono i punti $A(-3; 5)$, $B(3; -5)$, $C(3,5)$, i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC. Determina il perimetro di ABC e di MNP. Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

250 Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3), B(6;-1), C(-4;-3)$ è rettangolo. È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

251 Verifica che i segmenti AB e CD di estremi i $A\left(\frac{1}{2};2\right), B\left(-\frac{3}{4};-2\right), C(3;1), D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ punti hanno lo stesso punto medio. È vero che $\overline{AC} \cong \overline{BD}$?

►2. Il grafico di una funzione

Premettiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONI
Una funzione ***f*** è una corrispondenza univoca tra due insiemi non vuoti: ad ogni elemento **x** (**variabile indipendente)** del **D**ominio associa uno e un solo valore **y** della **variabile dipendente**.
L'elemento **y**, corrispondente di un elemento **x** del **D**ominio, viene detto **immagine di x nella funzione *f*** e si scrive **y = *f*(x)** che si legge *"y uguale effe di x"*.

Le funzioni numeriche, cioè aventi per Dominio e Codominio insiemi numerici, possono essere espresse:

- **Con linguaggio comune**, purché in modo preciso e inequivocabile:
  esempio: La funzione ***f*** "associa ad ogni numero razionale il suo triplo"
- **Attraverso un algoritmo**, cioè una serie di istruzioni per trasformare il valore della variabile indipendente (in ingresso) nel valore della variabile dipendente (in uscita) :
  Per esempio:

  Prendi un numero razionale → Moltiplicalo per 3 → Scrivi il risultato

  Variabile indipendente: x
Valore in ingresso $\xrightarrow{f}$ Variabile dipendente: y
Valore in uscita

- **Mediante una tabella**:

x	-2	0	3	7	10
y	-6	0	9	21	30

- **Con una formula** che indica il calcolo che si effettua sulla variabile indipendente per determinare in modo univoco il valore della variabile dipendente:
  Per esempio: y = 3x

252 Sono assegnate alcune funzioni con una formula; compila le tabelle accanto a ciascuna.

1) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y=\frac{1}{2}x$

x					
y					

2) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y=-x$

x					
y					

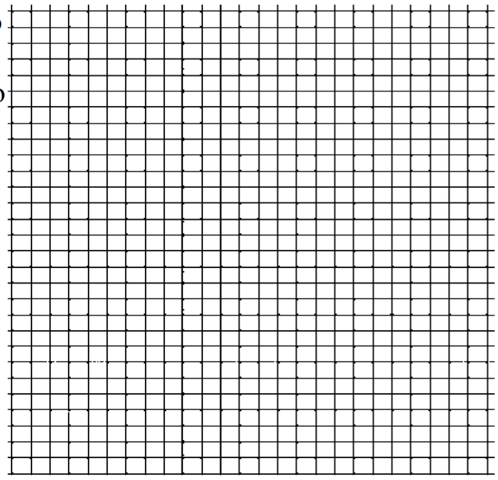
3) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad y=2-3x$

x					
y					

253 Esprimi con linguaggio comune la funzione 1) dell'esercizio precedente e rispondi alle domande:

a) Qual è l'immagine di 0? y = …………………
b) Quale elemento del **D**ominio ha per immagine 5? x =………………..
c) È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? …… Perché? ………………….
d) È vero che –1 è immagine di –2? …………perché? …………………….

254 Traccia sul piano quadrettato a fianco un riferimento cartesiano ortogonale monometrico.
Completa la tabella per la funzione $y = 2x$ avente come Dominio e Codominio l'insieme R dei numeri reali:



x	0		1/2	2	-3	
y		2				5

Ogni coppia (x;y) determina nel riferimento cartesiano un punto; rappresenta i punti le cui coordinate sono le coppie ordinate contenute nella tabella. Puoi osservare che i punti trovati sono allineati su una retta passante per l'origine del riferimento.

DEFINIZIONE. Si chiama **grafico di una funzione** l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano che rappresentano le coppie ordinate costruite tramite la funzione assegnata.

Osservazione
I pochi punti ottenuti dalla compilazione della tabella possono essere uniti con un tratto continuo perché assegnando alla variabile indipendente altri valori reali, ad esempio compresi tra 0 e 2, si potrebbero determinare infiniti punti che risulterebbero allineati con i precedenti.

Funzione di proporzionalità diretta

x	0	-1	1/2	2	-3	-5/2
y	0	2	-1	-4	6	5
y/x						

Compila la terza riga della tabella contenente il rapporto tra la variabile dipendente y e la variabile indipendente x. Cosa osservi?

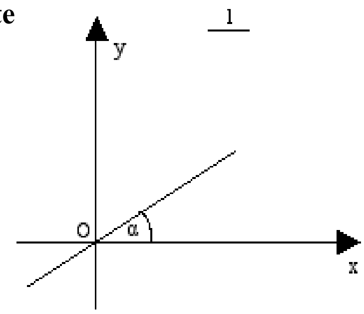
… … … … … … … … … … … … … …

… Completa: $\frac{y}{x} = \ldots\ldots$

DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il rapporto** tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità diretta**.

In simboli, y direttamente proporzionale a $x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x$

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una retta passante per l'origine; la costante k si chiama coefficiente angolare della retta.



Nella figura è rappresentata una retta passante per l'origine del riferimento; essa forma con l'asse orientato delle x un angolo α; la costante k ci dà informazioni su tale angolo.

255 Dopo aver determinato per ciascuna delle seguenti funzioni la costante k, traccia il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale:

a) $f_1 : y = \frac{1}{2} x$

b) $f_2 : y = x$

c) $f_3 : y = \frac{4}{3} x$

d) $f_4 : y = \frac{3}{5} x$

e) $f_5 : y = 5x$

f) $f_6 : y = -\frac{1}{2} x$

g) $f_7 : y = -x$

h) $f_8 : y = -\frac{3}{4} x$

256 Riporta in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale le prime cinque funzioni. Evidenzia con un tratto più calcato la funzione f_2 e compila la tabella:

funzione	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
k: coefficiente angolare					

Cancella i termini errati nella seguente analisi:
"*Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle x un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di 1 stanno sopra/sotto la f_2; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di 1 stanno sopra/sotto la f_2.*"

257 Ripeti l'esercizio precedente per le seconde cinque funzioni, evidenziando la funzione f_7; costruisci l'analoga tabella e cancella i termini errati nella seguente analisi:
"*Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle x un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di -1 stanno sopra/sotto la f_7; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di -1 stanno sopra/sotto la f_7.*"

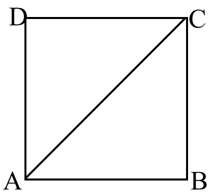
Conclusione
Se la costante di proporzionalità è positiva, l'angolo α è acuto, se la costante è negativa allora l'angolo α è ottuso.

Problema

Nel quadrato ABCD il cui lato misura x, determinare il perimetro e la diagonale.

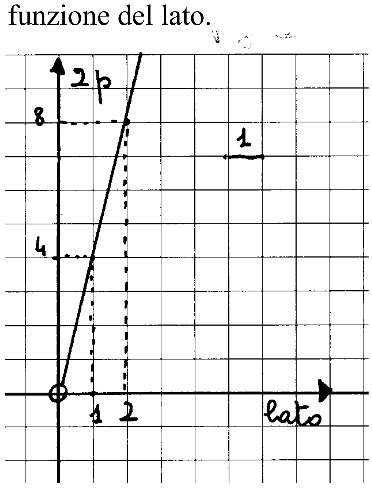
Dati: $\overline{AB} = x$ con $x > 0$

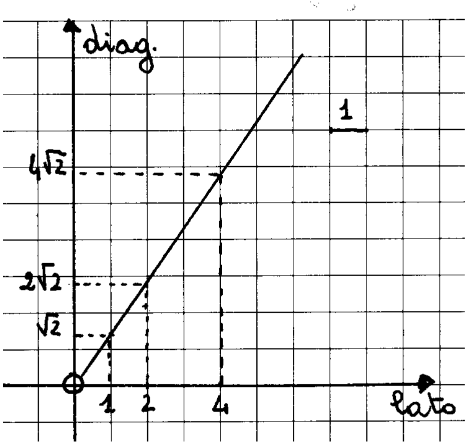
Obiettivo: ? $2p$; ? $\overline{AC}$



Soluzione

$2p = 4 \cdot x$, al variare del lato varia il perimetro, che risulta essere dunque funzione del lato.
Indicato con y il perimetro scriviamo $y = 4x$, funzione di proporzionalità diretta con $Dominio = R^+$, coefficiente $k = 4$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine.





Determiniamo ora la diagonale: per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \text{ da cui}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{2 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt{2}$$

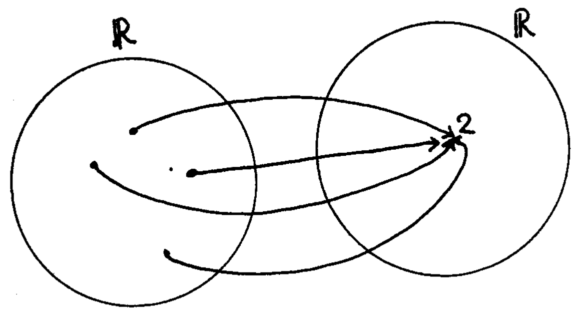
Indicando con y la diagonale si ha la funzione di proporzionalità diretta $y = \sqrt{2} \cdot x$ con coefficiente $k = \sqrt{2}$, di dominio $D = R^+$.
La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine.

258 x rappresenta la misura del lato di un triangolo equilatero; determina la misura della altezza al variare della misura del lato. Nel riferimento cartesiano ortogonale traccia il grafico della funzione ottenuta.

259 Quale deve essere la misura del lato di un quadrato per avere la diagonale di 2metri?

La funzione costante

Il seguente grafo rappresenta una funzione in cui **D**ominio = **R** e l'insieme **IM**magine = **{2}**:

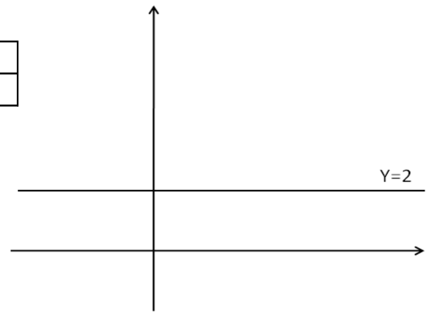


DEFINIZIONE. Si chiama **funzione costante** la legge che associa ad ogni valore assunto dalla variabile indipendente lo stesso valore della variabile dipendente; in simboli: $\forall\, x \in \mathbb{R}$ è $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Rappresentiamo la funzione del grafo come formula, compiliamo la tabella e infine tracciamo il suo grafico nel riferimento cartesiano ortogonale:

formula: $y=2$

x	-2	0	-3	1	2	…
y	2	2	2	2	...	...



Il grafico di una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse (asse x).
Osserviamo che se k è positivo la retta sta nel semipiano delle ordinate positive (I° e II° quadrante); se k è negativo la retta sta nel semipiano delle ordinate negative (III° e IV° quadrante); se k =0 allora la retta coincide con l'asse x delle ascisse.

260 Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle funzioni:

y=-2; y=6; y=0; y=-1 y=+3

261 Traccia nel riferimento cartesiano la funzione $y=1$ e $y=-3$; nello stesso riferimento traccia la funzione $y=2x$. Le tre rette individuano nel piano due punti. Determina la distanza dei due punti.

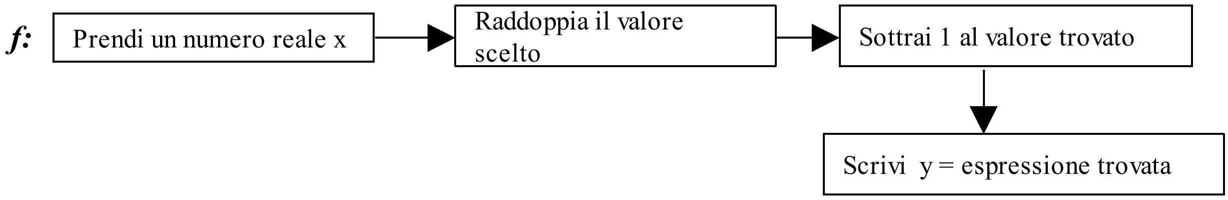
262 Le due funzioni f_1 e f_2 di proporzionalità diretta assegnate dalle tabelle seguenti delimitano sulla funzione y= -2 un segmento; determina la misura del segmento e il suo punto medio.

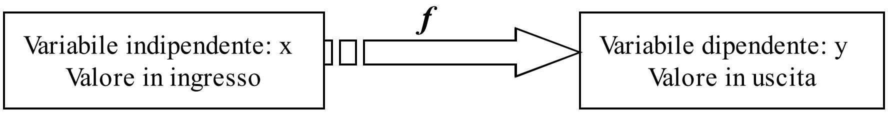
f_1:	x	-2	0	+3	-1
	y	2	0	-3	1
f_2	x	1	0	+3	-2
	y	4	0	12	-8

263 Traccia il grafico cartesiano delle funzioni $f_1: y = 2x$ $f_2: y = -\frac{1}{2}x$ $f_3: y = 2$ e indica con A e B rispettivamente i punti di intersezione di f_1 con f_3 e di f_2 con f_3. Considera il triangolo AOB (O è l'origine del riferimento). È vero che $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$? Sai trarre una caratteristica del triangolo AOB? Traccia nello stesso riferimento la funzione $f_4 = y-4$ e indica con C e D rispettivamente i punti di intersezione di f_1 con f_4 e di f_2 con f_4. Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

La funzione lineare

Le seguenti istruzioni individuano una funzione:





Completa:
La funzione assegnata si esprime con linguaggio comune: “ la differenza tra ……………………..

La formula che indica il legame algebrico tra la variabile indipendente e la variabile dipendente è y = … …
La tabella che ne rappresenta alcuni valori è:

x	-2	0	…	…	…	…	…
y			0				

Rappresenta i punti del grafico in un riferimento cartesiano ortogonale.
Rispondi:

- i punti trovati sono allineati? SI NO
- la funzione è una proporzionalità diretta? SI NO

DEFINIZIONE. Una funzione espressa dalla formula $y = m\cdot x + q$ con $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ il cui grafico è una retta si dicono **funzioni lineari**.

264 Sono assegnate le funzioni lineari: $f_1 : y = \frac{1}{2}x - 2$ $\quad f_2 : y = -x - \frac{3}{4}$ $\quad f_3 : y = 6x - 6$
Rappresentale in un riferimento cartesiano ortogonale dopo aver compilato per ciascuna una tabella di valori.

265 Segna nel riferimento cartesiano ortogonale i punti assegnati tramite la tabella:

x	-3	-3/2	0	3	6
y	-2	-1	0	2	4

La funzione assegnata è una proporzionalità diretta?
Scrivi la formula $y = \ldots\ldots\ldots$
Completa ora la tabella avente i medesimi valori della variabile indipendente, ma i valori della variabile dipendente siano ottenuti dai precedenti diminuiti di 2:

x	-3	-3/2	0	3	6
y	…	…	-2	…	…

Scrivi la formula della nuova funzione $y = \ldots\ldots\ldots$
Traccia il suo grafico nello stesso riferimento. È una funzione lineare? ………..

Significato dei coefficienti m e q nella funzione lineare y = mx+q

Se $m=0$ la funzione è $y=q$, il suo grafico è una retta parallela all'asse x.
Se $m\neq 0$ esso è il coefficiente angolare della retta; ci dà informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse orientato delle ascisse.
Se $m>0$ l'angolo formato con l'asse delle ascisse è un angolo acuto; se $m<0$ l'angolo è ottuso.
Se $q=0$ la funzione è $y=ax$, il suo grafico è una retta passante per l'origine.
Se $q\neq 0$ esso è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse y)

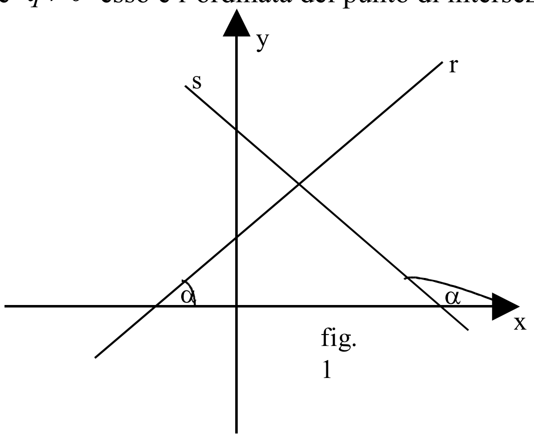


fig. 1

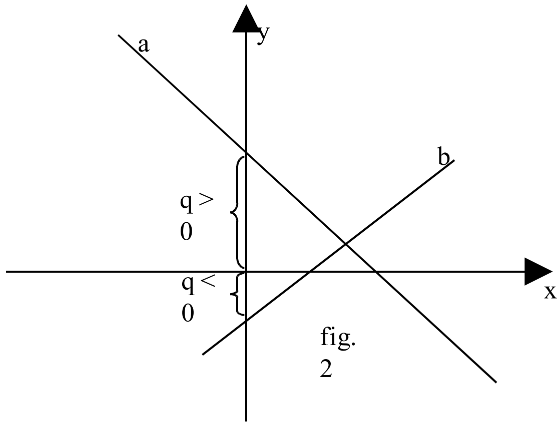


fig. 2

Conclusione
La funzione costante e la funzione di proporzionalità diretta sono funzioni lineari.

266 Riferendoti ai grafici delle figure 1 e 2, completa:

- nella formula della funzione avente r come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente s come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente a come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente b come grafico si ha m …. 0 e q …...0.

È possibile assegnata una tabella di corrispondenza determinare la formula della funzione lineare?
Si può determinare; noi analizzeremo solo un caso particolare.

Esempio
Stabilisci se la tabella assegnata rappresenta una funzione lineare e determina la formula che la descrive.

x	-2	-1	0	1	2/3
y	-8	-5	-2	1	0

Soluzione
Segno nel riferimento cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate $(x\,;y)$ date dalla tabella e osservo che il grafico è una retta non passante per l'origine. Non si tratta dunque di una proporzionalità diretta (d'altra parte il rapporto y/x non è costante!). Per determinare la formula devo stabilire il valore di m (coefficiente angolare) e di q .
Dalla tabella so individuare il valore di q : $q=-2$. Potrei ripercorrere all'inverso il procedimento dell'esercizio 13: sommo 2 a tutte le ordinate trovando la tabella della proporzionalità diretta $y=3x$
Quindi la formula della funzione lineare cercata è $y=3x-2$.

x	-2	-1	0	1	2/3
y	-6	-3	0	3	2

Osserviamo che questo procedimento è possibile perché nella tabella è già evidente il valore di q .

267 Le tabelle individuano coppie di punti allineati; trova la formula che descrive ciascuna funzione lineare e traccia il suo grafico.

F_1	x	5	-1	0	3	1
	y	-2	4	-3	0	2
F_2	x	-4	-4/3	0	-1/3	4/3
	y	-2	0	1	3/4	2
F_3	x	-6	-1	0	3	1
	y	-11/3	-1/3	1/3	7/3	1

La funzione di proporzionalità inversa

Problema

La base e l'altezza del rettangolo ABCD misurano rispettivamente 3cm e 4cm.
Determina la sua area.
Soluzione: ………………………………….
Se le misure dei lati sono numeri interi, esistono altri rettangoli equivalenti a quello dato?
………………………………………..
Costruisci i rettangoli equivalenti, indicando accanto a ciascuno la misura dei lati.
Se le misure fossero numeri reali, potresti determinare **tutti** i rettangoli equivalenti a quello assegnato?
…………………………………………………
Generalizziamo: I lati x e y di tutti i rettangoli equivalenti a quello dato sono legati dalla condizione $x \cdot y = 12$ con $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$

x	6	8	10	1/3	4/3
y	2	3/2	6/5	36	9

Osserviamo che se fissiamo il valore di x il lato y vale $y = \frac{12}{x}$ come nella tabella

Rappresenta ora nel riferimento cartesiano ortogonale i punti individuati dalla tabella: essi si collocano nel primo quadrante perché ………………………………………………………
Ti sembrano allineati? ……………………….

DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il prodotto** tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità inversa**. In simboli:
y inversamente proporzionale a $x \Leftrightarrow x \cdot y = k$ con $k \in \mathbb{R}_0$ e $x \neq 0$ o anche $y = \frac{k}{x}$

Il grafico di una funzione di proporzionalità inversa è una curva chiamate iperbole.
Analizziamo tale funzione e rappresentiamo il suo grafico a secondo dei valori della costante k.

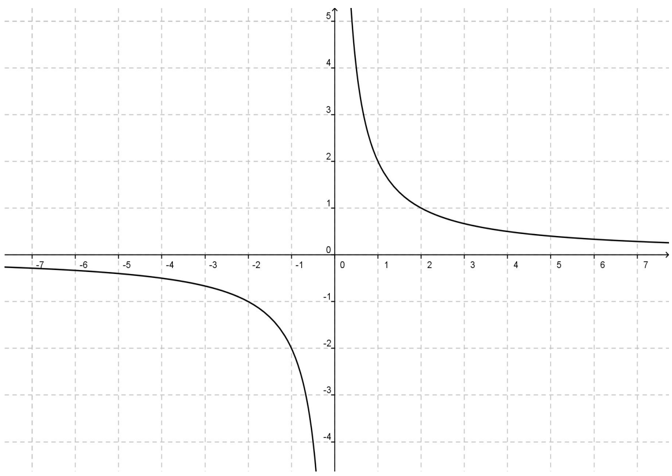
Caso k > 0: quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro concordi; al numero positivo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel primo quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel terzo quadrante.

Esempio

rappresentare graficamente la funzione $y = \frac{2}{x}$.

Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi:

x	-3	-1	-1/2	1	4	1/2	3
y	-2/3	-2	-4	2	1/2	4	2/3



e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel primo e terzo quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y=0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero (in questo caso è 2).
Il dominio è $D = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è $\mathrm{IM} = \mathbb{R}_0$.
Il grafico di questa funzione non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva **è una iperbole**; essa è formata da due rami che si collocano nel I° e III° quadrante.

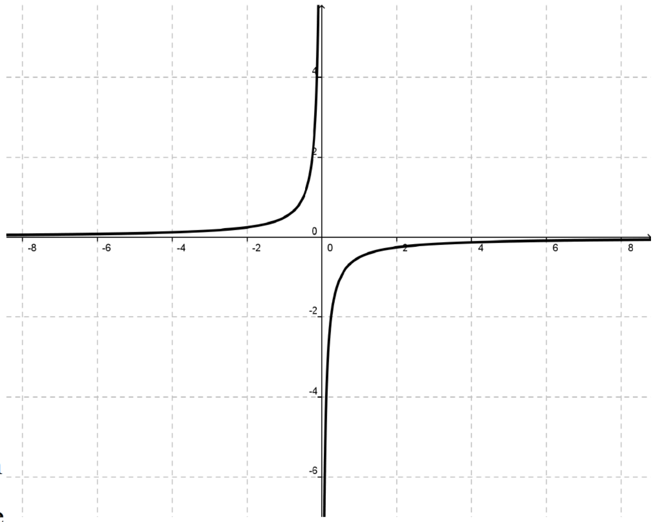
Caso k < 0: quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro discordi; al numero positivo x corrisponde il numero negativo $y=\frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel quarto quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero positivo $y=\frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel secondo quadrante.

Esempio

Rappresentare graficamente la funzione $y=-\frac{1}{2x}$.

Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi:

x	-2	-1	-1/2	1	2	1/2	3/2
y	+1/4	1/2	1	-1/2	-1/4	-1	-1/3



e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel secondo e quarto quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y=0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero, in questo caso $-\frac{1}{2}$. Il dominio è $D=\mathbb{R}_0$, l'insieme immagine è $\mathrm{IM}=\mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva **è una iperbole**; essa è formata da due rami che si collocano nel II° e IV° quadrante.

268 Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa:

a) $f_1=-\frac{3}{2x}$ b) $f_2=\frac{1}{x}$ c) $f_3=\frac{5}{x}$

d) $f_4=\frac{-3}{x}$ e) $f_5=-\frac{1}{x}$ f) $f_6=-\frac{2}{5x}$

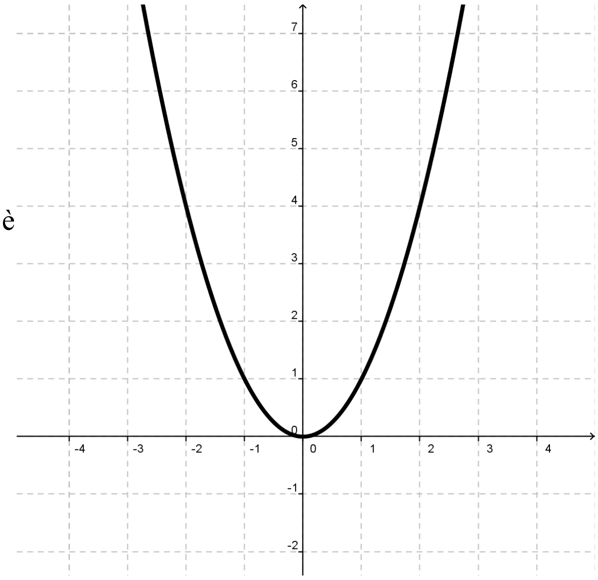
269 Traccia nelle stesso riferimento cartesiano ortogonale la curva γ $y=-\frac{1}{2x}$ e le rette $r_1:\ y=2$ e $r_2:\ y=-2$. Verifica che l'origine del riferimento è il punto medio del segmento avente per estremi i punti $A_1=r_1\cap\gamma$ e $A_2=r_2\cap\gamma$.

La funzione di proporzionalità quadratica

È assegnata la tabella che esprime il legame tra due variabili reali; determina se essa rappresenta una funzione costane, una funzione di proporzionalità diretta, di proporzionalità inversa oppure una funzione lineare:

x	-2	-1	1/2	0	2	3	3/2
y	4	1	1/4	0	4	9	9/4

Costruisci le proposizioni del tipo:
"La tabella rappresenta/non rappresenta una funzione di …………."
Come avrai notato dall'analisi delle coppie assegnate, quella tabella associa ad ogni valore della variabile indipendente il suo quadrato.
Il dominio di tale funzione è $D=R$, mentre l'Immagine è $\text{IM}=R^{+}\cup\{0\}$.
Possiamo osservare che è costante il rapporto tra il valore della variabile dipendente e il quadrato della variabile dipendente quando è diversa da zero; essendo $\frac{y}{x^2}=1$ con $x\neq 0$ la formula in cui si esprime il legame algebrico delle due variabili è, in questo caso, $y=x^2$.
Costruiamo il suo grafico, utilizzando i punti della tabella:



DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il rapporto** tra la variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità quadratica**.
In simboli: y proporzionale a $x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = k$ con $k\in\mathbb{R}$ e $k\neq 0$ o anche $y = k\cdot x^2$

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una curva passante per l'origine, chiamata parabola. Il punto O(0;0) si chiama vertice della parabola.

270 Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica:

a) $f_1 = -x^2$ b) $f_2 = x^2$ c) $f_3 = -\frac{1}{2}x^2$

d) $f_4 = -\frac{5}{2}x^2$ e) $f_5 = \frac{3}{4}x^2$ f) $f_6 = \frac{7}{3}x^2$

271 Dai grafici dell'esercizio precedente trai le conclusioni, completando:
- se $k>0$ allora i punti della parabola si trovano……………..
- se $k<0$ allora i punti della parabola si trovano ……………..
- se $k>1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y=x^2$? ………………
- se $0<k<1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y=x^2$?……………
- se $k<-1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y=-x^2$?……………
- se $-1<k<0$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y=-x^2$?…………

272 Determina la distanza del punto di ascissa $x=-2$ della parabola $y=3x^2$ dal suo vertice.

273 Sono assegnate le funzioni f_1: $y=(-x)^2$ e f_2: $y=-x^2$ di proporzionalità quadratica.
- Spiega se e perché sono o non sono la stessa funzione.
- Danne di ciascuna la descrizione in linguaggio comune.
- Costruisci per ciascuna una tabella di valori e costruisci il rispettivo grafico.
- Puoi confermare la risposta data alla prima richiesta?

274 Completa la seguente tabella:

funzione	in linguaggio comune	formula	tipo
F_1	Associa ad ogni x reale il valore –2/3		
F_2	Associa ad ogni x reale il triplo del suo quadrato		
F_3		$y=-5x^2$	
F_4	Associa ad ogni x reale il suo doppio aumentato di 3/2		
F_5	Associa ad ogni x reale diverso da zero l'opposto del suo reciproco		
F_6		$y=-5x$	

Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale le funzioni assegnate
Per quale/i è vero che per qualunque x del dominio è $\text{IM}=\mathbb{R}$

275 Il rettangolo ABCD ha il lato AB triplo del lato BC. Indica $\overline{BC}=x$; determina il perimetro del rettangolo in funzione di x. $2p=\ldots\ldots\ldots$
Spiega perché è necessaria la condizione $x>0$; rappresenta graficamente nel riferimento cartesiano la funzione perimetro.
Determina ora l'area in funzione di x, $area=\ldots\ldots\ldots$; rappresenta la funzione area, nello stesso riferimento.

276 Il triangolo rettangolo ABC, retto in A ha i cateti l'uno doppio dell'altro. Indica la misura del cateto minore $\overline{AB}=x$ e spiega perché è necessaria la condizione $x>0$. Determina in funzione di x l'area del triangolo. $area=\ldots\ldots\ldots$ rappresenta questa funzione nel riferimento cartesiano ortogonale.
Stabilisci le misure dei cateti se l'area è di $20cm^2$.
Calcola in funzione di x il perimetro del triangolo: $2p=\ldots\ldots\ldots$, rappresenta come varia la funzione perimetro al variare di x.

277 Nel triangolo isoscele ABC il lato obliquo AB è doppio della base BC; indica $\overline{BC}=x$ e determina in funzione di x il perimetro del triangolo. $2p=\ldots\ldots\ldots$
Di che funzione si tratta? Descrivila e rappresentala nel riferimento cartesiano ortogonale, dopo aver fissato le opportune condizioni sulla variabile indipendente.
Se il perimetro è cm120, quanto misurano i lati del triangolo?
Calcola, in questo caso, l'area del triangolo e la misura delle altezze relative ai lati uguali.

Autori

Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Claudio Carboncini: integrazioni
Germano Pettarin: esercizi
Angela D'Amato: correzioni
Nicola Chiriano: correzioni
Francesco Daddi: correzioni
Francesco Speciale: teoria, esercizi
Nicoletta Passera: esercizi
Laura Todisco: correzioni
Mauro Paladini: integrazioni, esercizi
Erasmo Modica: correzioni
Giuseppe Pipino: osservazioni
Maria Rosaria Agrello: osservazioni
Vittorio Patriarca: osservazioni
Luciano Sarra: correzioni
Francesca Lorenzoni: correzioni
Gemma Fiorito: correzioni
Antonio Bernardo: coordinatore

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3, o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 3.4 del 13.04.2010