

TEORIA CINETICA DEI GAS

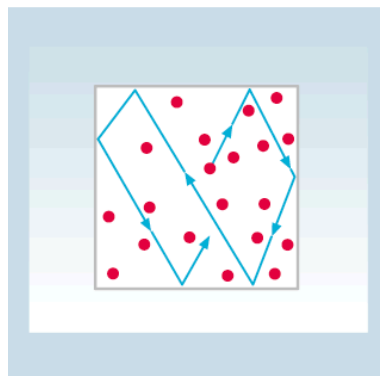
Le tre leggi empiriche dei gas e l'equazione di stato dei gas perfetti si basavano su misure sperimentali e non avevano alcuna spiegazione teorica.

Nasceva perciò la necessità di interpretare fisicamente il comportamento dei gas in base alle leggi della dinamica e di spiegare il motivo per cui le leggi dei gas risultavano rispettate solo se i gas erano sufficientemente rarefatti e la loro temperatura lontana da quella di liquefazione.

Nel 1738 Bernoulli tenta di spiegare il comportamento dei gas e getta le basi della teoria cinetica dei gas.

TEORIA CINETICA DEI GAS

- Studia il comportamento di un gas descrivendolo attraverso la velocità e l'energia cinetica delle sue molecole.
- Descrive un gas dal punto di vista statistico cioè non analizza il comportamento di ogni singola molecola ma quello dell'insieme delle molecole.
- Collega le grandezze macroscopiche volume, temperatura e pressione a quelle microscopiche.
- Si basa su un **modello di gas perfetto**, le cui principali caratteristiche sono:
 - Massa gassosa contenente un numero grandissimo di molecole indistinguibili e identiche (per una stessa specie chimica).
 - Le molecole sono immaginate come sferette rigide, tutte di ugual massa, di volume trascurabile rispetto a quello del contenitore.
 - Le molecole sono in moto continuo e disordinato (*caos molecolare*) lungo direzioni ugualmente probabili (*casualità del moto*).
 - Le forze di interazione fra le molecole si considerano nulle \Rightarrow tra un urto e il successivo il moto è rettilineo e uniforme.
 - Gli urti delle molecole contro le pareti del recipiente che le contiene sono perfettamente elastici \Rightarrow avvengono con conservazione della quantità di moto e della energia cinetica totale.



ENERGIA INTERNA DI UN GAS PERFETTO

Trascurando ogni forza tra le molecole, l'unica forma di energia ammessa è l'energia cinetica.

La somma delle energie cinetiche delle molecole del gas viene chiamata **energia interna** ed indicata con **U**.

Indicando con m la massa di ogni molecola e con v_1, v_2, \dots, v_n le singole velocità delle N molecole, si ha:

$$U = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \dots + \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) =$$

$$= \frac{mN}{2} \cdot \frac{(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)}{N}$$

Poiché il prodotto mN rappresenta la massa totale M del gas, il termine $\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{N}$

indica il valor medio dei quadrati delle velocità v_{qm}^2 e $\sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{N}} = v_{qm}$ la velocità

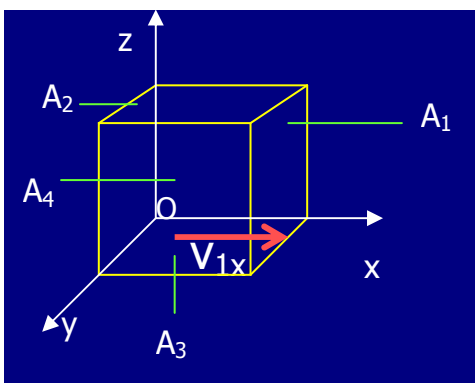
quadratica media delle molecole, si ha: $U = \frac{1}{2}Mv_{qm}^2$

Quindi:

L'energia interna di un gas perfetto, grandezza macroscopica, dipende dal valore statistico della grandezza microscopica velocità quadratica media.

PRESSIONE DI UN GAS PERFETTO

Per esprimere la pressione di un gas perfetto (grandezza macroscopica) in funzione della velocità delle sue molecole (grandezza microscopica) si consideri un recipiente a forma di cubo di lato l a pareti rigide e con gli spigoli paralleli ai tre assi



Consideriamo una certa massa di gas perfetto contenuta nel cubo e immaginiamo di isolare una molecola di massa m mobile all'interno del cubo con componente della velocità v_{1x} lungo l'asse x .

Sia A la superficie delle facce del cubo.

Quando la molecola urta la faccia A_1 del cubo ritorna indietro con componente di velocità in modulo uguale a quella iniziale ma di verso opposto ($-v_{1x}$) \Rightarrow una variazione della quantità di moto

$$\Delta q = q_f - q_i = -mv_{1x} - mv_{1x} = -2mv_{1x}$$

Essendo il sistema molecola-parete isolato, la quantità di moto totale del sistema rimane costante e la parete del cubo acquista, nell'urto, una quantità di moto

$$\Delta q_{par} = -\Delta q = 2mv_{1x}$$

Poiché il moto della molecola è rettilineo ed uniforme, il tempo impiegato per due successivi urti della molecola sulla stessa parete è: $\Delta t = \frac{2l}{v_{1x}}$

La forza con cui reagisce la parete è:

$$F_{\text{par}} = \frac{-2mv_{1x}}{\frac{2l}{v_{1x}}} = -\frac{mv_{1x}^2}{l}$$

La forza con cui la molecola agisce sulla parete è:

$$F_{\text{molec}} = \frac{mv_{1x}^2}{l} \quad (\text{di modulo uguale a } F_{\text{par}} \text{ ma di verso opposto)}$$

La pressione media esercitata dalla molecola sulla parete A_1 è:

$$p_{1x} = \frac{F}{l^2} = \frac{mv_{1x}^2}{l} \cdot \frac{1}{l^2} = \frac{mv_{1x}^2}{l^3}$$

Se indichiamo con N il numero totale delle molecole del gas e con v_{1x}, v_{2x}, \dots , le componenti della velocità secondo l'asse x , alla pressione esercitata su A_1 contribuiranno tutte le N molecole



$$\begin{aligned} p_x &= p_{1x} + p_{2x} + \dots + p_{nx} = \frac{m}{l^3} (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \dots + v_{nx}^2) = \\ &= \frac{mN}{l^3} \cdot \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \dots + v_{nx}^2}{N} \end{aligned}$$

Ma, essendo $mN=M$ e $\frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \dots + v_{nx}^2}{N} = v_{qm}^2$ si ha:

$$p_x = \frac{M}{l^3} v_{qmx}^2 = \frac{M}{V} v_{qmx}^2$$

Ricordando la definizione di densità, si ha:

$$p_x = \frac{M}{l^3} v_{qmx}^2 = \frac{M}{V} v_{qmx}^2 = \rho \cdot v_{qmx}^2$$

Poiché il moto delle molecole è casuale $\Rightarrow v_{qmx}^2 = v_{qmy}^2 = v_{q mz}^2$

Estendendo il teorema di Pitagora $\Rightarrow v_{qm}^2 = v_{qmx}^2 + v_{qmy}^2 + v_{q mz}^2$

e quindi $v_{qm}^2 = 3v_{qmx}^2 \Rightarrow p_x = \frac{M}{3V} v_{qm}^2 \Rightarrow p_x V = \frac{M}{3} v_{qm}^2$

La pressione esercitata nelle direzioni y e z è la stessa esercitata nella direzione $x \Rightarrow$

$$p = \frac{M}{3V} v_{qm}^2, \quad pV = \frac{M}{3} v_{qm}^2$$

Poiché $\rho = \frac{M}{V}$

\Rightarrow

$$p = \frac{1}{3} \rho v_{qm}^2 \quad (\text{Legge di JOULE-CLAUSIUS})$$

ENERGIA CINETICA E TEMPERATURA

- Considerando che $U = \frac{1}{2} M v_{qm}^2 \Rightarrow M v_{qm}^2 = 2U$ e sostituendo in

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{V} v_{qm}^2 \Rightarrow p = \frac{1}{3} \cdot \frac{2U}{V} \Rightarrow pV = \frac{2}{3} U$$

Ricordando che $p \cdot V = nR \cdot T$ (eq. di Clapeyron)



$$nRT = \frac{2}{3} U \quad \Rightarrow$$

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

Quindi:

L'energia interna di un gas perfetto dipende unicamente dalla temperatura assoluta.

- Sostituendo $U = \frac{3}{2} nRT$ nella $U = \frac{1}{2} M v_{qm}^2 \Rightarrow \frac{3}{2} nRT = \frac{1}{2} M v_{qm}^2 \Rightarrow v_{qm}^2 = \frac{3nRT}{M}$

ma $\frac{n}{M} = \frac{1}{M}$ dove M indica il peso molecolare del gas $\Rightarrow v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \Rightarrow v_{qm}$ *dipende da T*

Risolvendo rispetto a T \Rightarrow

$$T = \frac{M v_{qm}^2}{3R}$$

La temperatura si definisce cinematicamente come un indice del grado di agitazione termica del gas proporzionale al quadrato della velocità quadratica media delle molecole.

- Confrontando le espressioni dell'energia interna $U = \frac{1}{2} M v_{qm}^2$ e $U = \frac{3}{2} nRT \Rightarrow$

$U = \frac{1}{2} M v_{qm}^2 = \frac{3}{2} nRT \Rightarrow$ dividendo entrambi i membri per $N \Rightarrow$ *l'energia cinetica media*

riferita ad una sola molecola $\frac{U}{N} = \frac{1}{2} \frac{M}{N} v_{qm}^2 = \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT$ ma $\frac{M}{N} = m$ e $\frac{n}{N} = \frac{1}{N_0}$ (N_0 indica

il numero di Avogadro, n indica il numero delle moli del gas ed è $n = \frac{N}{N_0}$) \Rightarrow

$$\frac{U}{N} = \frac{1}{2} m v_{qm}^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0} T, \text{ il rapporto } \frac{R}{N_0} = K \text{ costante di Boltzmann .}$$

Nel S.I. K ha il valore $1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

Quindi l'energia cinetica media di ogni molecola del gas è data da $\frac{U}{N} = \frac{1}{2} m v_{qm}^2 = \frac{3}{2} K T$

L'energia cinetica media di ogni molecola del gas dipende soltanto dal valore della temperatura assoluta alla quale si trova il gas.